

Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências
Departamento de Física



Teorias escalares-tensoriais e teoria de Saa

Daniel Filipe Estradas Raposo

Dissertação

Mestrado em Física

Especialização em Astrofísica e Cosmologia

2015

Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências
Departamento de Física



Teorias escalares-tensoriais e teoria de Saa

Daniel Filipe Estradas Raposo

Dissertação orientada pelo Prof. Doutor Nelson Nunes e co-orientada pelo Prof.
Doutor Francisco Lobo

Mestrado em Física

Especialização em Astrofísica e Cosmologia

2015

Resumo

Nesta tese de Mestrado apresento um estudo sobre teorias escalares-tensoriais, em particular aquelas com potencial quadrático. Apresento a teoria de Brans-Dicke e o respectivo fundamento físico baseado no princípio de Mach sobre a inércia de corpos com massa. Estendo essa teoria para as mais gerais teorias escalares-tensoriais que, ao contrário da teoria de Brans-Dicke, trazem diferenças fundamentais à evolução do universo respeitando no entanto as observações no sistema solar. Apresento as propriedades interessantes destas teorias focando-me principalmente no potencial quadrático.

No terceiro capítulo apresento um estudo de soluções analíticas na forma exacta para um potencial quadrático, em universos dominados por radiação, matéria “stiff”, ou vazios. Estas soluções exactas são escritas na forma de funções elípticas de Jacobi ou funções elípticas de Weierstrass. Comparo as soluções com a dinâmica no espaço de fases, e apresento graficamente o comportamento qualitativo das mesmas soluções exactas obtidas. Este capítulo está incluído num artigo em preparação elaborado por mim, pelo Prof. Doutor José Pedro Mimoso, pelo meu orientador Doutor Nelson Nunes, e pelo meu co-orientador Doutor Francisco Lobo.

Posteriormente no quarto capítulo discuto teorias escalares-tensoriais com parâmetro de acoplamento constante para o caso de um campo escalar complexo, novamente para um potencial quadrático, em universos dominados por poeira, radiação, matéria “stiff”, constante cosmológica ou vácuo. Apresento uma análise de sistemas dinâmicos focando-me nas soluções que permitem universos acelerados.

No quinto capítulo considero a mesma teoria que no quarto capítulo, mas com um campo real e com acoplamento do mesmo campo à matéria. A análise é feita da mesma forma que no quarto capítulo, mas agora apenas para universos preenchidos com poeira, matéria “stiff” e constante cosmológica, dado que o campo escalar não acopla à radiação, e para vácuo não há nada para acoplar.

Por fim, no sexto capítulo, apresento um breve estudo sobre uma teoria elaborada em 1993 por Alberto Saa. Esta teoria propõe-se a compatibilizar o elemento de volume da integração no espaço-tempo com a existência de torção. Isto origina um novo grau de liberdade (dinâmico) que corresponde a torção propagativa. Este tipo de torção não existe na teoria de Einstein-Cartan (Relatividade Geral com torção). De modo a tornar esta teoria compatível com as observações, apresento uma modificação interessante da teoria original de Saa, diferenciando as trajectórias de bósons e de férmions. Esta teoria é, em muitos casos, quase equivalente a uma teoria escalar-tensorial. Este capítulo também se encontra num artigo em preparação elaborado por mim.

Palavras chave - escalar-tensorial, campo complexo, acoplamento à matéria, teoria de Saa.

Abstract

In this Master's thesis I present a study of scalar-tensor theories, particularly those with quadratic potential. I present the Brans-Dicke theory and its physical foundation based on Mach's principle on the inertia of massive bodies. I extend this theory to the more general scalar-tensor theories that, contrary to that of Brans-Dicke, bring fundamental differences to the evolution of the universe and are compatible with solar system observations. I present the interesting properties of these theories, focusing especially on the quadratic potential.

In the third chapter I present a study of exact analytical solutions for a quadratic potential in universes dominated by radiation, stiff matter, or empty. These exact solutions are written in the form of Jacobi elliptic functions or Weierstrass elliptic functions. I compare these solutions with the dynamical phase space, and graphically present the qualitative behavior of the same obtained exact solutions. This chapter is included in an article currently in preparation, elaborated Prof. Doctor José Pedro Mimoso, by my supervisor Doctor Nelson Nunes, and my co-supervisor Doctor Francisco Lobo.

Later in the fourth chapter I discuss scalar-tensor theories with constant coupling parameter for the case of a complex scalar field, again with a quadratic potential in universes dominated by dust, radiation, stiff matter, cosmological constant or vacuum. I present a dynamical system analysis focusing on solutions that allow for expanding universes.

In the fifth chapter I consider the same theory of that studied in the fourth chapter, but with a real field and with a coupling of the same field with matter. The analysis is made in the same way as in the fourth chapter, but now only for universes filled, dust, stiff matter and cosmological constant, since the scalar field does not couple to radiation and in vacuum there is nothing to couple to.

Finally, in the sixth chapter, I present a brief study of a theory developed in 1993 by Alberto Saa. This theory proposes to match the volume element of the integration in space-time with the existence of torsion. This results in a new (dynamical) degree of freedom corresponding to propagating torsion. This type of torsion does not exist in the theory of Einstein-Cartan (General Relativity with torsion). In order to make this theory compatible with solar system observations, I present an interesting modification of the original theory of Saa, differentiating trajectories of bosons and fermions. This theory is, in many cases, almost equivalent to a scalar-tensor theory. This chapter is also in an article elaborated by me, currently in preparation.

Key Words - scalar-tensor, complex field, matter coupling, Saa theory

Índice

Capítulo	pág.
1 Introdução	1
2 Teorias escalares-tensoriais	3
2.1 Relatividade Geral	3
2.1.1 Cosmologia em Relatividade Geral	4
2.1.2 Princípio Variacional	7
2.2 Princípio de Mach	10
2.3 Teoria de Brans-Dicke	11
2.3.1 Cosmologia BD	13
2.3.2 Limite de campo fraco	16
2.3.3 Transformação conforme	18
2.3.4 Constante cosmológica	19
2.4 Teorias de Brans-Dicke generalizadas	22
2.4.1 Cosmologia FRW	24
2.4.2 Invariância conforme do potencial	26
2.4.3 O potencial e a atracção à Relatividade Geral	27
3 Potencial quadrático - Soluções exactas	30
3.1 Dualidade vácuo-stiff	31
3.2 Soluções exactas de vácuo em Relatividade Geral ($f = 0$)	32
3.2.1 Caso $k = -1$	32
3.2.2 Caso $k = 0$	33
3.2.3 Caso $k = +1$	33
3.3 O caso de vácuo com $f \neq 0$	34
3.3.1 Região I e II : O caso $k=+1$ e $\Delta > 0$	35
3.3.2 Região III : O caso $k=+1$ e $\Delta < 0$	36
3.3.3 Caso $k = +1$ e $\Delta = 0$	40
3.3.4 Caso $k = -1$	41
3.3.5 Caso $k = 0$	43
3.4 Soluções exactas de radiação em Relatividade Geral ($f = 0$)	46
3.5 O caso de radiação com $f \neq 0$	46
4 Potencial quadrático - Campo escalar complexo	50
4.1 Radiação e vácuo	52
4.2 Poeira	55
4.3 Constante cosmológica	57
4.4 Stiff	58
5 Potencial quadrático - Interação com a matéria	60
5.1 Poeira em $\alpha = 1$	62
5.2 Falso vácuo em $\alpha = 1$	63
5.3 Stiff em $\alpha = 1$	64
6 Teoria de Saa	66
6.1 Teoria de Einstein-Cartan	66
6.2 Modificação de EC - Teoria de Saa	68
6.2.1 Campo escalar	68
6.2.2 Campo vectorial	69
6.2.3 Spinor de Dirac	69
6.3 Modificação da teoria de Saa - Bosões e Fermiões	72
6.3.1 Constante Cosmológica	73
6.3.2 Fluido ultra-relativista (bosões + fermiões)	74
7 Conclusão	77
Agradecimentos	78
Bibliografia	79
Apêndice - Funções elípticas de Jacobi e Weierstrass	80

1. INTRODUÇÃO

A Física como todos a conhecemos teve o seu início no famoso texto *Principia* de Isaac Newton. Nesse texto eram lançados os fundamentos da mecânica clássica, em particular da gravitação. Antes disso, Galileu tinha estudado a queda de graves, chegando à conclusão que objectos de diferente composição acelerarão da mesma forma, assim como Kepler tinha descrito com grande precisão o movimento dos planetas em orbitas elípticas em torno do Sol. Newton descobrira porém que o fenómeno que leva à queda de uma maçã é o mesmo que leva às orbitas, a gravidade. Nasceu assim a teoria da gravitação Newtoniana, uma teoria que previa com enorme exactidão o movimento de objectos em campos gravíticos, campos esses gerados por distribuições de massa. Durante muitos anos esta teoria mostrou ser extremamente bem sucedida chegando por exemplo a permitir a descoberta do planeta Neptuno, apenas com base nas perturbações gravitacionais geradas no planeta Urano.

No entanto, a teoria Newtoniana da gravitação não estava isenta de problemas, como reconhecido pelo próprio Newton. Por exemplo, de acordo com esta teoria, a força gravitacional seria transmitida instantaneamente, e sem qualquer mediador. Outro exemplo, ao nível observacional, vem do facto da órbita de mercúrio apresentava uma precessão que não podia ser explicada pela teoria Newtoniana. Porém, o maior problema desta teoria seria revelado no início do século XX.

Em 1905 Albert Einstein formulou a teoria da Relatividade Restrita tendo como base as experiências de Michelson-Morley e a teoria do Electromagnetismo. Partindo dos postulados do princípio da relatividade (as leis da física têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais) e da invariância da velocidade da luz em todos os referenciais inerciais. Como consequência, a transformação de Galileu (baseada na adição de velocidades) deu lugar à transformação de Lorenz (que tinha já surgido na teoria do Electromagnetismo, porém sem uma clara interpretação física). A transformação Galileana seria então uma aproximação para velocidades muito menores do que a velocidade da luz. Em Relatividade Restrita o próprio tempo surge na transformação de coordenadas, deixando de ser um parâmetro absoluto e Universal como o era na teoria clássica de Newton. Surgiam então conceitos novos como dilatação do tempo, contração do espaço e relatividade da simultaneidade. Era assim bastante claro que a teoria da gravitação Newtoniana era incompatível com a teoria da Relatividade Restrita. Einstein trabalhara nesta incompatibilidade tendo chegado à teoria da Relatividade Geral.

Um postulado muito importante desta teoria (que permitiu por si só deduzir o fenómeno de redshift da luz num campo gravítico) é o princípio da equivalência, que afirma que as leis da física num campo gravítico são as mesmas que num referencial acelerado, uma afirmação baseada na igualdade entre a massa gravítica (massa que contribui para a atração gravítica) e a massa inercial (que determina a resistência de um corpo a acelerações). Uma consequência importante desde princípio é a noção de localidade - durante um espaço de tempo suficientemente curto, um observador que cai num campo gravítico ao fazer medições não conseguirá concluir que cai num campo gravítico. Só a uma distância suficientemente grande do seu laboratório e/ou ao fim de um tempo suficientemente longo, podem ser detectados os efeitos do campo gravítico. Tal permitiu a Einstein chegar à noção de que a gravidade não era uma força mas sim um fenómeno - corpos em queda livre num espaço-tempo curvo. Esta curvatura teria como fonte a energia e momento dos campos de matéria.

Aplicando esta teoria ao sistema solar foi possível explicar a precessão do periélio de Mercúrio e prever correctamente o desvio da luz (light bending) por parte de um objecto massivo (o Sol neste caso). Em 1922 Friedmann aplicou estas novas equações ao Universo a grande escala, considerando-o como homogéneo e isotrópico (a grandes escalas). Chegava-se assim às equações de Friedmann, que previam um Universo dinâmico (em expansão ou contração).

A ideia aceite na altura era que o Universo era estático, e já em 1917 Einstein tinha introduzido um novo termo às suas equações (constante cosmológica) de modo a impedir o Universo de colapsar. No entanto, no final dos anos 20, observações do redshift de galáxias distantes por parte de Edwin Hubble revelavam que o Universo se encontra em expansão. Tal seria compatível com as equações de Friedmann sem necessidade da constante cosmológica. Einstein abandonaria então esta constante, considerando-a como o “maior erro da sua vida”.

Desde de que surgiu, a teoria da Relatividade Geral mostrou ter enorme sucesso a descrever o funcionamento do Universo, a pequenas e a grandes escalas. Iriam no entanto surgir teorias alternativas à Relatividade Geral. As teorias mais viáveis corresponderiam a modificações da teoria da Relatividade Geral. Alguns dos casos mais discutidos correspondem à teoria de Brans Dicke [4] e às generalizações que dela advêm. Esta teoria foi formulada por Carl Brans e Robert Dicke como uma tentativa de tornar a Relatividade Geral totalmente compatível com o princípio de Mach, princípio este formulado por Ernst Mach que afirma que as propriedades inerciais da matéria não são absolutas mas determinadas pela distribuição de matéria no Universo. Brans e Dicke concretizaram este princípio introduzindo um campo escalar acoplado à curvatura do espaço-tempo que resulta de ter a “constante” gravitacional a variar. No entanto esta teoria passa pelos testes no sistema solar apenas no limite em que a “constante” gravitacional

praticamente não varia - o limite da Relatividade Geral. Por isso, ao longo dos tempos têm surgido modificações desta teoria de modo a torna-la compatível com as observações no sistema solar, seja introduzindo um acoplamento variável à curvatura, seja dando massa ao campo. Estas teorias viriam a ter ainda mais atenção com uma grande descoberta que chegaria ao final do século.

Em 1998 foram publicadas medições de supernovas distantes do tipo Ia [1] que revelavam que o universo se encontra em expansão acelerada. Tal não podia ser explicado a partir da Relatividade Geral (sem constante cosmológica). No entanto a constante cosmológica que tinha sido abandonada, voltava a estar no centro das atenções pois permitia o fenómeno da expansão acelerada do universo. Observações posteriores feitas até hoje [24] confirmaram sempre este cenário, e a causa deste fenómeno ficou conhecida como energia escura.

Estimativas (grosseiras) da energia do vácuo em teoria quântica de campo [29] prevêm uma densidade de energia 120 ordens de grandeza acima do valor observado [24] para a densidade de energia associada à constante cosmológica (se interpretarmos a energia escura como uma energia-momento do vácuo). Isto mostra o fraco (ou nulo) conhecimento que temos do modo como a energia do vácuo contribui gravitacionalmente (este é um fenómeno puramente quântico). Pode ser até que esta energia não tenha qualquer contribuição para a estrutura do espaço-tempo a grande escala. Neste caso, a alternativa para manter esta constante é considera-la como um termo ligado à curvatura do espaço-tempo (curvatura no vazio).

No entanto, uma forte possibilidade é que a energia escura seja uma evidência de uma teoria modificada da gravitação. Entre essas teorias encontram-se as já mencionadas teorias escalares-tensoriais que introduzem um campo escalar acoplado à curvatura do espaço-tempo.

Nesta tese de Mestrado começo por fazer uma breve introdução à cosmologia em Relatividade Geral. Considero posteriormente a teoria de Brans-Dicke e as respectivas generalizações para as teorias escalares tensoriais, apresentando a respectiva análise de sistemas dinâmicos e uma discussão da invariância conforme do potencial.

Posteriormente apresento um estudo sobre teorias escalares tensoriais, focando o caso do campo escalar com um potencial quadrático. Para este potencial as equações de campo simplificam-se significativamente, permitindo até obter soluções analíticas exactas para o caso de um universo dominado por radiação, matéria “stiff” ou vácuo. Existe uma dualidade vácuo-stiff pois com devidas mudanças de variáveis, chega-se às mesmas soluções que para o caso de vácuo. Esta análise é feita num espaço métrico a que se chama de referencial de Einstein. Porém permite deduzir diversos comportamentos para o espaço métrico físico (referencial de Jordan), em particular a expansão acelerada do universo. As soluções obtidas (a esmagadora maioria) encontram-se escritas na forma de funções elípticas de Jacobi ou funções elípticas de Weierstrass, que são brevemente descritas em apêndice.

Nos dois capítulos seguintes considero o estudo destas teorias, com parâmetro de acoplamento constante e novamente com potencial quadrático, para um campo escalar complexo e para um campo escalar em interacção com a matéria. Faço uma análise de sistemas dinâmicos para o caso de um universo vazio, dominado por poeira, radiação, falso vácuo ou “stiff”, procurando obter o comportamento geral destas teorias perante diferentes tipos de matéria.

Por fim faço uma breve discussão de uma teoria não explorada na literatura [3] elaborada em 1993 por Alberto Saa, que eu denomino simplesmente de teoria de Saa. Esta teoria corresponde a uma modificação da teoria de Einstein-Cartan, uma teoria idêntica à Relatividade Geral à parte a que se considera a possibilidade da existência de torção, tendo esta origem por sua vez em fluidos com spin. A teoria de Saa exige que o elemento de volume da integração no espaço-tempo tenha derivada (covariante) nula, como acontece em Relatividade Geral mas já não acontece na teoria de Einstein-Cartan. Isto origina um novo grau de liberdade (campo escalar). Porém a teoria como está é incompatível com as observações no sistema solar e por isso considere uma modificação interessante desta teoria, que fica compatível com as observações.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”

Isaac Newton

2. TEORIAS ESCALARES-TENSORIAIS

Nesta primeira secção começo por fazer uma breve introdução à Relatividade Geral [21,25] e posteriormente à teoria de Brans-Dicke, e por fim às mais gerais teorias escalares-tensoriais.

2.1. Relatividade Geral

Em 1915 Albert Einstein formou a teoria da Relatividade Geral que se propunha a compatibilizar a teoria da gravitação com a Teoria da Relatividade Restrita.

Na teoria da Relatividade Restrita, o espaço-tempo é descrito pela métrica de Minkowski (coordenadas rectilíneas)

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

As propriedades intrínsecas e dependentes do espaço-tempo são dadas pela métrica $g_{\mu\nu}$ que em Relatividade Geral é uma função das coordenadas de espaço-tempo x^μ . Denotamos o inverso da métrica como $g^{\mu\nu}$, e assim $g_{\mu\nu}g^{\mu\rho} = \delta_\nu^\rho$. Usa-se assim o tensor da métrica para subir e descer índices de tensores

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu. \quad (2.2)$$

A métrica é calculada a partir da equação (tensorial) de Einstein, escrita na forma covariante como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $R = R^\mu_\mu$ e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento dos campos de matéria.

O tensor de Ricci é dado a partir do tensor de Riemann, $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$. O tensor de Riemann descreve totalmente a curvatura do espaço-tempo, sendo dado a partir da conexão $\Gamma^\gamma_{\mu\nu}$ que determina as geodésicas do respectivo espaço-tempo (trajectórias de partículas livres)

$$R^\beta_{\mu\nu\alpha} = \partial_\nu\Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\Gamma^\beta_{\nu\mu} + \Gamma^\beta_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\mu} - \Gamma^\beta_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\nu\mu}. \quad (2.4)$$

A trajectória de uma partícula é a generalização de uma recta para o espaço-tempo curvo. Esta é dada a partir da equação da geodésica

$$\frac{d^2x^\gamma}{ds^2} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.5)$$

onde

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.6)$$

é o elemento de linha do espaço-tempo. No caso de partículas que viajam à velocidade da luz ($ds = 0$) e então devemos utilizar um parâmetro afim que permita parâmetrizar a geodésica. Note-se que $d\tau^2 = ds^2/c^2$ é o tempo próprio.

A generalização da derivada parcial para o espaço-tempo curvo é a derivada covariante

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu A^\rho, \quad \nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho. \quad (2.7)$$

De modo a que um escalar seja invariante quando efectuam um transporte paralelo ao longo de qualquer curva (derivada covariante na direção dessa curva é 0), exigimos que a derivada covariante seja compatível com a métrica, ou seja,

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

Outra forma de derivar esta equação é notar que de acordo com o princípio de equivalência, é possível eliminar os efeitos gravitacionais localmente fazendo uma transformação para um referencial inercial local, em coordenadas de Minkowski, e assim as conexões anulam-se pois de acordo com (2.1) $\partial_\rho \eta_{\mu\nu} = 0$, e assim neste referencial $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$. Mas se um tensor é nulo num sistema de coordenadas, então é nulo em todos, e assim chegamos à fórmula geral (2.8).

Esta compatibilidade das geodésicas (Γ) com a métrica implica, de acordo a definição de derivada covariante e admitindo que a conexão do espaço tempo é simétrica no índices inferiores,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\rho} \left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) \quad (2.9)$$

que é a conexão de Levi-Civita, ou símbolos de Christoffel de 2 espécie.

Assim a equação (2.3) permite-nos calcular a métrica do espaço-tempo a partir de 6 equações (independentes) não lineares e às derivadas parciais.

O tensor de Einstein respeita as identidades de Bianchi contraídas, que se escrevem como

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

que com a equação (2.3) leva à generalização da conservação da energia-momento no espaço-tempo curvo

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.11)$$

Ambos os tensores de (refGR) são simétricos e é usual descrever a matéria/energia como um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

onde ρ é a densidade de energia, p a pressão e u_μ o quadri-vector velocidade do fluido (normalizado a $u^\mu u_\mu = -1$).

2.1.1. Cosmologia em Relatividade Geral

O âmbito deste trabalho é o estudo do Universo a grande escala - cosmologia. Faço portanto antes de mais um resumo da evolução do Universo para a teoria da Relatividade Geral. A partir de agora, adopto unidades geometrizadas onde $G = c = 1$.

De acordo com as observações, consideramos um Universo homogéneo e isotrópico. Tomamos assim a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) dada pelo elemento de linha (em coordenadas esféricas com origem no observador)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.13)$$

onde $a(t)$ é o factor de escala do Universo e k a curvatura espacial - $k = +1$ corresponde a universo fechado, $k = -1$ a um universo aberto, e $k = 0$ a um univeso plano.

Para esta métrica temos as componentes não nulas do tensor de Einstein

$$G_{00} = 3(\dot{a}^2 + k)/a^2, \quad G_{ii} = -(\dot{a}^2 + k + 2\ddot{a})/a^2, \quad (2.14)$$

onde $i = r, \theta, \phi$ e $\dot{a} = da/dt$.

Assumimos a matéria/energia do Universo descrita como um fluido perfeito (2.12) com $u^\mu = dx^\mu/ds = (1, 0, 0, 0)$ e homogéneo (obsevamos um universo homogéneo e isotrópico).

Podemos assim chegar às duas equações de Friedmann

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (2.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p). \quad (2.16)$$

Considere-se também a equação de conservação de energia-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ (componente $\nu = 0$)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.17)$$

Separando o fluido em espécies não relativistas (poeira) e espécies ultrarelativistas (radiação) temos a equação (2.15) escrita na forma

$$1 = \Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_k(a), \quad (2.18)$$

onde

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{H^2 a^2}, \quad (2.19)$$

e onde

$$\Omega_{m/r} \equiv \frac{8\pi}{3H^2} \rho_{m/r} \quad (2.20)$$

é o parâmetro de densidade da poeira (matéria bariónica e matéria escura) ou radiação (fotões e neutrinos).

Considerando que a matéria/energia segue a equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ temos, usando (2.17),

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma}. \quad (2.21)$$

Temos assim que para poeira, matéria não relativista, $\gamma = 1$ e assim

$$\rho \propto a^{-3}, \quad (2.22)$$

enquanto que para radiação (espécies ultrarelativistas), $\gamma = 4/3$ e ficamos com

$$\rho \propto a^{-4}. \quad (2.23)$$

Olhando para este comportamento vemos que no passado suficientemente distante as espécies ultrarelativistas dominam a não relativista no que toca à expansão do Universo. Quando o factor de escala é suficientemente grande, a poeira passa a dominar.

Usando a primeira equação de Friedmann podemos ver que para o domínio da poeira temos que

$$a \propto t^{2/3}, \quad (2.24)$$

enquanto que para o domínio da radiação

$$a \propto t^{1/2}. \quad (2.25)$$

Considerando estes dois fluidos a primeira equação de Friedmann pode-se escrever na forma

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{k0} a^{-2} + \Omega_{r0} a^{-4} \right), \quad (2.26)$$

onde Ω_{m0} , Ω_{k0} e Ω_{r0} são os parâmetros de (2.19,2.20) na actualidade, e H_0 o parâmetro de Hubble hoje. O valor do parâmetro de densidade das espécies relativistas (fótons e neutrinos) é $\Omega_r \approx 8 \times 10^{-5}$ [8,24].

Em 1998 observações [1] sugeriam pela primeira vez que o Universo se encontra em expansão acelerada. Tal expansão não pode ser explicada pela Relatividade Geral expressa pela equação (2.3).

Tornava-se útil recuperar a constante cosmológica Λ , que entra na equação de Einstein como

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

No modo como esta equação está escrita, o novo termo pode ser entendido como um termo de curvatura. Mas passando-o para o lado direito, podemos interpreta-lo como uma energia do vazio com equação de estado $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$, onde

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (2.28)$$

As equações de Friedmann com matéria, radiação e constante cosmológica ficam

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_m + \rho_r) - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}\rho_m - \frac{8\pi}{3}\rho_r + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.30)$$

É possível verificar que para que o Universo expanda eternamente é necessario que seja satisfeita a condição

$$\Omega_{\Lambda 0} \geq \begin{cases} 0, & 0 \leq \Omega_{m0} \leq 1; \\ 4\Omega_{m0} \cos^3 \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{1-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right], & \Omega_{m0} > 1. \end{cases} \quad (2.31)$$

onde $\Omega_{\Lambda 0} \equiv \Lambda/(3H_0^2)$ e se desprezou a densidade de energia das espécies relativistas.

Para um $\Omega_{\Lambda 0}$ suficientemente grande temos universos sem big bang - Universos que colapsaram desde o infinito e voltaram a expandir. Isto acontece quando

$$\Omega_{\Lambda 0} \geq \begin{cases} 4\Omega_{m0} \cosh^3 \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{1-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}} \right) \right], & \Omega_{m0} < 0.5; \\ 4\Omega_{m0} \cos^3 \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{1-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}} \right) \right], & \Omega_{m0} > 0.5. \end{cases} \quad (2.32)$$

Os diferentes destinos possíveis do Universo encontram-se sumarizados na Figura 1 [29].

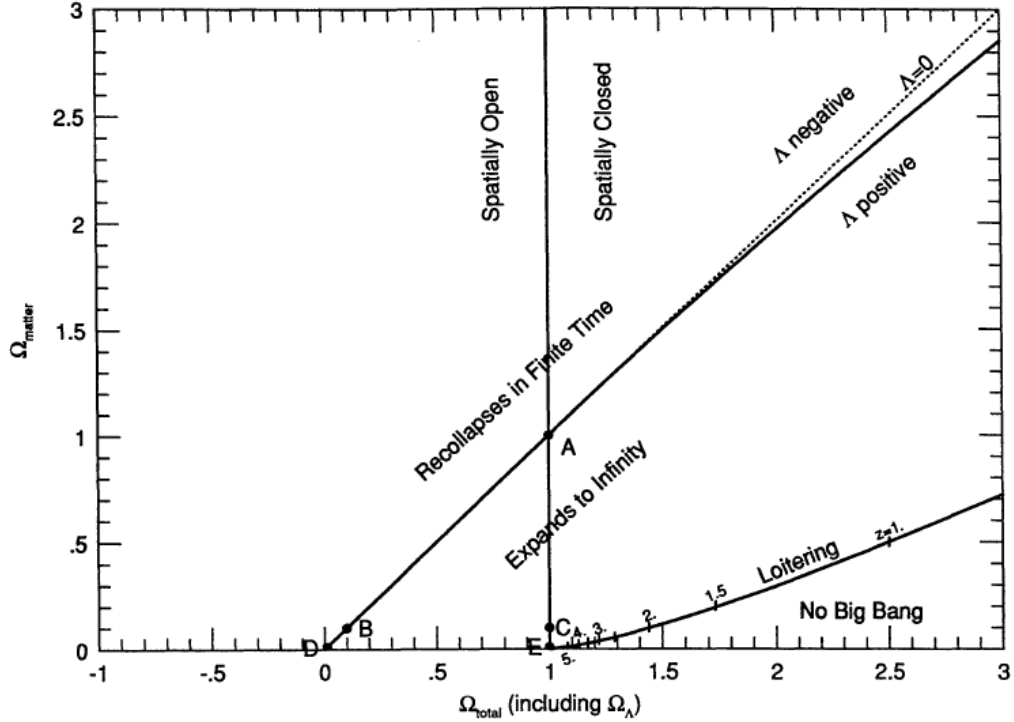


Figura 1: [29] O destino do Universo em função de Ω_{m0} e $\Omega_{total} = 1 - \Omega_{k0}$.

Os resultados da sonda Planck em 2015 [24] mostram os valores $\Omega_{m0} = 0.308 \pm 0.012$, $\Omega_{k0} = 0.000 \pm 0.005$ e $H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Tal leva a um valor $\Lambda \sim 10^{-37} \text{ s}^{-2}$ (unidades geometrizadas).

2.1.2. Princípio variacional

A equação de Einstein (2.3) pode ser deduzida a partir de um formalismo variacional baseando-nos na ação de Einstein-Hilbert.

No sentido mais geral, numa formulação Lagrangiana de teoria de campo consideramos um conjunto de campos ψ^k a determinar numa teoria, mais propriamente numa variedade M onde os campos tensoriais se encontram definidos. Consideramos também um funcional $S[\psi^k]$: uma aplicação das configurações possíveis dos campos num escalar. E sejam ψ_λ^k essas mesmas configurações funções diferenciáveis no parâmetro λ , que partem de ψ_0^k . A partir dessas mesmas definimos $\delta\psi^k = d\psi_\lambda^k/d\lambda$.

Se $dS/d\lambda$ existe e é dado por

$$\frac{dS}{d\lambda} = \int_M \frac{\delta S}{\delta \psi^k} \delta \psi^k, \quad (2.33)$$

então diz-se que S é funcionalmente diferenciável em ψ_λ^k e $\delta S / \delta \psi^k$ é a sua derivada funcional.

Tomamos agora funcionais da forma

$$S[\psi^k] = \int_M \mathcal{L}[\psi^k], \quad (2.34)$$

com \mathcal{L} uma função diferenciável de ψ^k e das suas derivadas covariantes até certa ordem. Se S for funcionalmente diferenciável e se as configurações ψ_λ^k que extremizam S , ou seja,

$$\frac{\delta S}{\delta \psi^k} = 0, \quad (2.35)$$

são aquelas que são soluções das equações de campo dos ψ^k , então S é chamado de acção e \mathcal{L} é chamado de densidade Lagrangiana.

Consideramos configurações que permitem aos campos ψ_λ^k estarem fixos na fronteira ∂D de um qualquer compacto contido na variedade M . No caso da Relatividade Geral o campo tensorial a determinar é a métrica, de tal forma que a equação de Einstein seja obedecida. No entanto, na integração (2.34) o elemento de volume do espaço tempo d^4x depende do sistema de coordenadas. Tal portanto não é um escalar, mas transforma-se como uma densidade tensorial de peso 1. Um tensor densidade \mathcal{T} de peso W transforma-se como (g é o determinante da métrica, que é negativo)

$$(\sqrt{-g'})^W \mathcal{T}'^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \dots (\sqrt{-g})^W \mathcal{T}^{\sigma\rho\dots}_{\delta\beta\dots}. \quad (2.36)$$

Portanto $(\sqrt{-g})^W \mathcal{T}$ transforma-se como um tensor ordinário.

Dada a transformação de coordenadas na métrica

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (2.37)$$

calculando o determinante temos

$$g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g, \quad (2.38)$$

onde $\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$ é o jacobiano da transformação. Temos assim

$$\sqrt{-g'} d^4x' = \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.39)$$

Portanto $\sqrt{-g} d^4x$ é um escalar ordinário, e assim um volume elementar invariante. Fará assim sentido que a integração (2.34) seja feita com este elemento de volume. Portanto vamos definir

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} L, \quad (2.40)$$

onde L é um escalar que chamamos Lagrangiano. O princípio de Einstein-Hilbert tem como Lagrangiano

$$L = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + 16\pi L_M, \quad (2.41)$$

em que L_M é o Lagrangiano dos campos de matéria. O primeiro termo do Lagrangiano denomina-se por Lagrangiano da geometria. Portanto, de acordo com esta notação, o meu campo tensorial ψ_0 é a métrica, e a minha família de configurações da métrica $\psi_\lambda = g_\lambda^{\mu\nu}$, que partem da métrica $g_0^{\mu\nu}$, que denominamos simplesmente de $g^{\mu\nu}$, a solução da equação de Einstein.

Façamos então a variação da acção de Einstein-Hilbert (em termos da métrica) demonstrando que se obtêm as equações de Einstein.

$$\delta S = 0 \Rightarrow \int \left[\delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + R \delta(\sqrt{-g}) + 16\pi L_m \delta(\sqrt{-g}) + 16\pi \delta L_M \sqrt{-g} \right] d^4x = 0. \quad (2.42)$$

Pela idêntidade de Jacobi temos

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}), \quad \delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}). \quad (2.43)$$

Olhe-se agora para o primeiro termo de (2.42) na integração. A variação do tensor de Ricci é escrita em termos de variações de conexões de Levi-Civita, que são tensores apesar das mesmas conexões em si não serem. Isto vê-se considerando o modo como as conexões se transformam

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\prime\sigma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\prime\nu}} \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\delta} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}}. \quad (2.44)$$

Quando se faz a variação de Γ o segundo termo corta (pois não depende da conexão), e assim temos um objecto ($\delta\Gamma$) que se transforma como um tensor. Temos assim (; representa a derivada covariante)

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu;\sigma}^\sigma - \delta\Gamma_{\mu\sigma;\nu}^\sigma. \quad (2.45)$$

A variação da conexão de Levi-Civita é dada por

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left[(\delta g_{\mu\gamma})_{;\nu} + (\delta g_{\nu\gamma})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\gamma} \right]. \quad (2.46)$$

Este termo pode ser entendido como uma soma de derivadas covariantes pois $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$.

Por definição, a derivada covariante (∇_μ) de um tensor \mathcal{T} densidade de peso W tem o termo extra $-W\Gamma_{\mu\nu}^\nu \mathcal{T}^{\dots}$. Assim, sendo $\sqrt{-g}$ um escalar densidade de peso 1

$$\sqrt{-g}_{;\mu} = \sqrt{-g}_{,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\nu \sqrt{-g}, \quad (2.47)$$

onde $_{,\mu}$ representa a derivada parcial em termos de x^μ . Mas usando (2.43) temos que $\sqrt{-g}_{;\mu} = 0$. Assim, demonstra-se [26] que o primeiro termo no integral em (2.42) pode ser tomado como uma subtracção de derivadas covariantes, e aplicando a integração por partes duas vezes temos (pelo teorema de Gauss) as variações da métrica avaliadas na fronteira da região de integração que, como referido na introdução ao princípio variacional, são 0.

Para os restantes termos, exigindo que os coeficientes de $\delta g_{\mu\nu}$ dentro do integral se anulem, temos (2.3), onde o tensor energia-momento é escrito como

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} L_M - 2 \frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.48)$$

No que toca aos coeficientes das variações dos outros campos ψ^k (da matéria), como o Lagrangiano da geometria não depende deles, só temos que aplicar a variação ao Lagrangiano de matéria.

Por fim notar que para obter a equação de Einstein com a constante cosmológica devemos considerar o Lagrangiano

$$L = R - 2\Lambda + 16\pi L_M. \quad (2.49)$$

Este formalismo será fundamental nas teorias alternativas á Relatividade Geral que irei descrever neste trabalho. Mas antes de me debruçar sobre elas faço uma breve abordagem ao princípio de Mach, que está na base da teoria de Brans-Dicke (que por sua vez está na base das teorias escalares-tensoriais).

2.2. Princípio de Mach

Se o espaço é uma entidade independente com as suas propriedades ou apenas uma abstracção conceptual que se baseia na existência de corpos, perdendo o seu significado sem estes, é uma questão que levanta duas grandes visões sobre o mundo em que vivemos - a visão absoluta e a visão relativa. A origem destes conceitos divergentes vem desde os tempos da Grécia antiga em que Platão via o espaço como um objecto ideal, absoluto, enquanto Aristoteles apoiava uma filosofia mais ligada à visão relativa do espaço [17]. Esta discussão foi relançada no Renascimento. Por exemplo Descartes considerava que os corpos constituíam o espaço por eles mesmos, ou seja, não existe espaço sem corpos. Por outro lado Leibniz afirmava que a posição relativa de corpos é suficiente para a definição do espaço. Leibniz considerava que nenhuma localização ou orientação de corpos é discernível de uma outra localização ou orientação. No entanto a visão dominante passaria a ser a de Newton - um espaço e tempo absolutos, objectos independentes dos eventos físicos que neles ocorrem.

A segunda lei de Newton tem a forma

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.50)$$

Esta lei indica que um corpo de massa m sujeito a uma força externa \vec{F} sofre uma aceleração \vec{a} . Considere-se que estas grandezas são medidas num sistema e coordenadas S . Se escolhermos outro sistema de coordenadas S' que tem uma aceleração \vec{g} , a segunda lei toma a forma

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{g} = m\vec{a}'. \quad (2.51)$$

Olhando para esta equação surge uma nova força, proporcional à massa do corpo. Esta força foi denominada de força inercial por Newton. Segundo Newton a força surge devido a uma aceleração em relação a um espaço absoluto - o espaço identificado pela inexistência de forças inerciais. Newton ilustra este fenómeno com um exemplo de um balde com água em rotação [17,22]. Neste exemplo considere-se um balde cheio de água. Considere-se que o balde é colocado em rotação. Um observador na sala concluiria que o balde se encontra em rotação enquanto que uma mosca no topo do balde concluiria que o balde está em repouso e a sala encontra-se em rotação. No entanto a mosca notaria uma diferença na água : quando colocado em rotação a superfície da água deixa de ser plana e adopta uma forma curva. A mosca concluiria então a existência de uma força centrífuga. Newton afirmou então que o balde, antes em repouso em relação ao espaço absoluto passa a sofrer uma rotação em relação a esse mesmo espaço (rotação absoluta).

A crítica mais famosa a interpretação Newtoniana vem de Ernst Mach. Mach afirmou que as conclusões de Newton correspondem à verdade apenas num espaço hipoteticamente vazio e na suposição de que o sistema em questão mantém as suas propriedades neste espaço vazio. Porém para Mach existe uma diferença fundamental entre o caso do balde em repouso e do balde em rotação. No primeiro caso a água está em repouso em relação às estrelas distâtes, e no segundo em rotação em relação às mesmas. Para Mach o movimento e espaço absoluto são conceitos que residem apenas nas nossas mentes, e não podem ser alcançados pela experiência. O referencial S visto anteriormente não apresenta as chamadas forças inerciais apenas porque se encontra em repouso em relação ao corpos celestes que constituem o nosso universo. Isto pois é na base das estrelas distâtes que se define o referencial absoluto de Newton.

Para melhor ilustrar o ponto de vista de Mach considere-se um universo constituído apenas por um corpo. Como não existem forças externas a segunda lei de Newton fica

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0. \quad (2.52)$$

Seguindo o ponto de vista Newtoniano esta relação implicaria que o objecto move-se a velocidade constante. Porém, segundo a perspectiva relativa que Mach segue, como não existem mais corpos não é possível criar um referencial com o qual estudar o movimento do corpo em questão. Assim, \vec{a} não estaria definido, e somos levados à conclusão de que $m = 0$. Isto significa que a inércia de um corpo depende não só de si próprio, mas também dos restantes corpos que constituem o universo.

Se a reacção inercial deve ser interpretada como uma interacção entre a matéria no universo, é de esperar que a massa inercial dependa da distribuição de matéria no universo em torno do corpo em questão. Porém não existe nenhuma maneira de comparar massas em diferentes pontos do espaço. Precisamos então de uma unidade de massa com a qual medir a variação da massa de uma partícula. É possível construir uma quantidade adimensional que depende da massa de uma partícula e da constante gravitacional. Esta é dada por

$$\mu = m \left(\frac{G}{\hbar c} \right)^{1/2}, \quad (2.53)$$

sendo \hbar a constante de Planck. Brans e Dicke [4] argumentaram que se \hbar e c não variam, então não existe uma diferença fundamental entre ter a massa ou G a variar quando detectamos uma variação na quantidade μ que medimos. Procuraram assim um quadro em que o valor da “constante” gravitacional G tem origem na estrutura do universo, e assim um G a variar é visto como uma consequência Machiana de um universo dinâmico.

Em 1953, com base em argumentos dimensionais, Sciama afirmou que a constante gravitacional estaria ligada à estrutura de grande escala do universo através da relação

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 1, \quad (2.54)$$

onde M é a massa contida no universo visível e R o raio do mesmo [22]. Brans e Dicke interpretaram esta relação como indicador de que o valor da constante gravitacional observado localmente deve ser variável e dependente da distribuição de matéria em torno do ponto em questão. Esta interpretação implica uma violação da versão forte do princípio de equivalência, que afirma que as leis da física, observadas localmente, são independentes do tempo e local onde essas leis são observadas. Voltando à expressão anterior poderia-se supor, nas mesmas condições em que a aproximação é dada, que o recíproco da constante gravitacional é dado por uma sobreposição linear na forma

$$G^{-1} \sim \sum_i \frac{m_i}{r_i c^2}, \quad (2.55)$$

soma esta efectuada sobre todos os corpos do universo visível. Brans e Dicke tomaram isto como evidencia de que o recíproco de G se comporta como um campo escalar que obedece a uma equação de onda escalar, já que m/r é solução da equação de Laplace com uma fonte pontual de massa m .

Descrevo agora o próximo passo deste raciocínio, que é a elaboração matemática da teoria de Brans-Dicke. Esta constitui uma modificação da teoria da Relatividade Geral.

2.3. Teoria de Brans-Dicke

De acordo com o que foi apresentado, possuímos motivações suficientes para escrever uma teoria alternativa à de Einstein, que esteja em maior conformidade com o princípio de Mach. Esperamos então que o nosso campo escalar G^{-1} siga uma equação em que o lado direito é $\square\phi \equiv g^{\mu\nu}\phi_{,\mu;\nu}$ e o lado esquerdo é proporcional à matéria. O escalar mais simples para tal efeito é o traço T do tensor energia-momento. Portanto a equação mais simples é

$$\square\phi = 4\pi\lambda T, \quad (2.56)$$

onde λ é uma constante de acoplamento adimensional. O próximo passo corresponde à substituição de G por ϕ^{-1} na equação de Einstein e à adição do lado direito de um tensor energia-momento deste novo campo escalar. Ou seja

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu}^\phi. \quad (2.57)$$

A forma mais simples que podemos supor para neste novo tensor envolve produtos de duas derivadas de primeira ordem de ϕ assim como segundas derivadas [32]. Com isto, considerando as identidades de Bianchi e a conservação habitual da energia momento $T_{\mu\nu}$, temos ao fim de alguns cálculos a equação

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\phi_{,\sigma}\phi^{,\sigma}) - \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\square\phi), \quad (2.58)$$

onde $\omega = \lambda^{-1} - 3/2$. A equação (2.56) fica

$$\square\phi = \frac{8\pi T}{3 + 2\omega}. \quad (2.59)$$

Vemos que o limite $\omega \rightarrow +\infty$ garante ϕ constante, e assim recuperamos a Relatividade Geral. Em geral tal não acontece no entanto para casos em que $T = 0$.

A acção adequada para obter estas equações é

$$S[g^{\alpha\beta}, \phi, \psi^k] = \int \left[\phi R - \omega\phi^{-1}\phi_{,\sigma}\phi^{,\sigma} + 16\pi L_M \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.60)$$

com ψ^k os campos de matéria.

Esta acção coloca em grande evidência a violação do princípio de equivalência (forte), pois a gravitação já não é um fenómeno puramente geométrico, é também determinado por um campo escalar ϕ acoplado à curvatura.

Olhando para (2.58) e (2.57) vemos que o tensor energia-momento do campo escalar pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu}^\phi = \frac{\omega}{8\pi\phi^2} (\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\sigma}\phi^{,\sigma}) + \frac{1}{8\pi\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\square\phi), \quad (2.61)$$

Usando a equação (2.57) temos que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^\phi = \frac{\phi_{,\nu}}{\phi^2} T_{\mu\nu}. \quad (2.62)$$

A propósito desta relação podmos ser levados a pensar que a mesma implica que existe uma transferência de energia entre o campo escalar e a matéria [9]. Tal não é verdade pois temos a conservação de energia-momento da matéria $T_{\mu\nu}^{;\mu} = 0$. A desigualdade $T_{\mu\nu}^{;\mu} \neq 0$ é uma consequência do campo escalar de Brans-Dicke não constituir um fluido normal (no sentido dos campos de matéria) pelo facto de estar acoplado à curvatura, como é visível na acção (2.60). Multiplicando a equação (2.57) por ϕ chegamos à equação de conservação

$$\nabla^\mu [\phi(8\pi T_{\mu\nu}^\phi - G_{\mu\nu})] = 0. \quad (2.63)$$

Esta deve ser a lei de conservação de energia-momento para um fluido acoplado à curvatura. É possível generalizar esta lei para acoplamentos mais gerais (ver secção 2.4) do que o ϕR que surge neste Lagrangiano.

Para $\omega = -3/2$ a equação de campo do campo escalar não está definida. Excluimos esse caso à partida.

2.3.1. Cosmologia BD

Considere-se a métrica FRW (2.13) para um universo preenchido com poeira ($p = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0(a_0/a)^3$). A componente (00) da equação (2.58) fica

$$3H^2 + 3\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{\phi}\rho - 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2. \quad (2.64)$$

Os termos com segundas derivadas $\ddot{\phi}$ não aparecem nesta equação pois verifica-se que para uma métrica FRW

$$\phi_{,0;0} - g_{00}\square\phi = \ddot{\phi} + (-\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi}) = -3H\dot{\phi}. \quad (2.65)$$

Como o d'Alembertiano pode ser escrito como

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi) \quad (2.66)$$

a equação de campo (2.59) pode-se escrever na forma

$$-a^{-3}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}a^3) = -\frac{8\pi}{3+2\omega}\rho \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\phi}a^3) = \frac{8\pi}{3+2\omega}\rho_0a_0^3. \quad (2.67)$$

Desprezando o factor de escala no início do domínio da matéria (que aproximamos por $t = 0$) e considerando que $\dot{\phi}$ não diverge quando recuamos até ao passado obtemos, integrando,

$$\dot{\phi}a^3 = \frac{8\pi}{3+2\omega}\rho_0a_0^3t. \quad (2.68)$$

Admitindo que as soluções têm a forma

$$a = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^m, \quad \phi = \phi_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^n, \quad (2.69)$$

podemos verificar que para um universo plano ($k = 0$) temos [4]

$$m = \frac{2+2\omega}{4+3\omega}, \quad n = \frac{2}{4+3\omega}, \quad \phi_0 = 4\pi\frac{4+3\omega}{3+2\omega}\rho_0t_0^2, \quad (2.70)$$

para $\omega \neq -4/3$.

Notando que o raio do universo observável é $R = t_0$ (recorde-se que uso unidades $c=1$), temos que o valor de ϕ_0 aqui calculado é compatível com a relação (2.54). Portanto esta teoria alcança aquilo que se pretendia na interpretação do princípio de Mach apresentada na secção anterior.

Para $\omega = -4/3$ obtemos

$$m = 2, \quad n = -4, \quad \phi_0 = -6\pi\rho_0t_0^2. \quad (2.71)$$

Para este e para alguns outros valores de ω temos uma constante gravitacional negativa o que obviamente não observamos hoje. No entanto tal solução pode ainda fazer sentido no âmbito de um ω variável na história do universo (secção 2.4).

Para o caso $k \neq 0$ não é possível encontrar soluções analíticas nesta forma simples de lei de potência. Ao longo deste trabalho farei diversas análises deste gênero para teorias que contêm a teoria de Brans-Dicke (teorias escalares-tensoriais), estudando soluções exactas para certos tipos de matéria.

Tratando o campo escalar como um fluido perfeito de densidade de energia ρ^ϕ e pressão p^ϕ a equação (2.62) fica

$$\dot{\rho}^\phi + 3H(\rho^\phi + p^\phi) = \frac{\dot{\phi}}{\phi} \frac{\rho}{\phi}. \quad (2.72)$$

Olhando para (2.61) vemos que

$$\rho^\phi = T_{00}^\phi = \frac{1}{16\pi} \left[\omega \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - 6H \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right], \quad (2.73)$$

$$p^\phi = a^2 T_{ii} = \frac{1}{16\pi} \left[\omega \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 4H \frac{\dot{\phi}}{\phi} + 2 \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right], \quad (2.74)$$

com $i = 1, 2, 3$.

Para o caso de poeira num universo plano, usamos as soluções anteriormente obtidas para chegar a ($\omega \neq -4/3$)

$$\rho^\phi = -\frac{5\omega + 6}{4\pi(4 + 3\omega)^2 t^2}, \quad (2.75)$$

$$p^\phi = \frac{1 + \omega}{2\pi(4 + 3\omega)^2 t^2}, \quad (2.76)$$

Isto mostra que para $\omega > -6/5$ a densidade de energia do campo escalar é negativa.

Para a equação de estado $p^\phi = (\gamma^\phi - 1)\rho^\phi$ temos neste caso que

$$\gamma^\phi = \frac{4 + 3\omega}{6 + 5\omega}. \quad (2.77)$$

Assim, se $\omega = -4/3$ temos um campo escalar a comportar-se como falso vácuo ($p^\phi = -\rho^\phi$). Porém, como foi visto, as soluções obtidas para a e ϕ não são válidas neste caso. Mas se ω estiver arbitrariamente próximo deste valor, então o fluido fica arbitrariamente próximo de se comportar como falso vácuo.

Para $\omega = -4/3$ temos

$$\rho^\phi = \frac{5}{3\pi t^2}, \quad p^\phi = -\frac{5}{6\pi t^2}, \quad (2.78)$$

e assim

$$\gamma^\phi = \frac{1}{2}. \quad (2.79)$$

Para o caso de radiação ($p = \rho/3$) a equação de campo para ϕ dá

$$\dot{\phi} a^3 = f = \text{cte.} \quad (2.80)$$

Se a constante é zero recuperamos a Relatividade Geral (ϕ contante). Para o caso em que a constante é diferente de zero, ou seja, $\dot{\phi} \neq 0$, obtemos como solução :

$$m = 1, \quad n = -2, \quad \phi_0 = -\frac{8\pi}{2\omega + 3}\rho_0^2 t_0^2. \quad (2.81)$$

Temos assim

$$\rho^\phi = \frac{\omega + 3}{4\pi t^2}, \quad p^\phi = \frac{\omega + 1}{4\pi t^2}. \quad (2.82)$$

e portanto

$$\gamma^\phi = \frac{2\omega + 4}{\omega + 3}. \quad (2.83)$$

Vemos que neste caso que por exemplo para $\omega = -3$ o campo escalar comporta-se como poeira ($\gamma^\phi = 1$) e para valores muito próximos de -2 ($|\omega + 2| \ll 1$) comporta-se igualmente próximo de falso vácuo : $|\gamma^\phi| \ll 1$. Recorde-se que fazemos sempre $\omega \neq -3/2$ pois neste caso a equação o campo escalar não está definida. Podemos apenas falar de valores tão próximos quanto queiramos de $-3/2$ mas nunca exactamente esse valor.

Nestas soluções é visível que o limite $\omega \rightarrow \infty$ não recupera as soluções da Relatividade Geral.

Por fim, para o caso de vácuo temos igualmente a equação de campo de ϕ escrita como (2.80). Novamente, para o caso em que a constante é diferente de 0 obtemos dois conjuntos de soluções. O primeiro conjunto corresponde a

$$m = \frac{3 + 3\omega + \sqrt{9 + 6\omega}}{12 + 9\omega}, \quad n = \frac{1 - \sqrt{9 + 6\omega}}{4 + 3\omega}, \quad (2.84)$$

com $\omega \neq -4/3$ e ϕ_0 indeterminado.

Com isto temos

$$\rho^\phi = \frac{18 + 14\omega + 3\omega^2 + (12 + 8\omega)\sqrt{9 + 6\omega}}{8\pi(4 + 3\omega)^2 t^2}, \quad p^\phi = \frac{5 + 6\omega + 3\omega^2 + (6\omega + 35/3)\sqrt{9 + 6\omega}}{8\pi(4 + 3\omega)^2 t^2}. \quad (2.85)$$

e portanto

$$\gamma^\phi = \frac{23 + 20\omega + 6\omega^2 + (14\omega + 71/3)\sqrt{9 + 6\omega}}{18 + 14\omega + 3\omega^2 + (12 + 8\omega)\sqrt{9 + 6\omega}}. \quad (2.86)$$

O segundo conjunto de soluções é

$$m = \frac{3 + 3\omega - \sqrt{9 + 6\omega}}{12 + 9\omega}, \quad n = \frac{1 + \sqrt{9 + 6\omega}}{4 + 3\omega}, \quad (2.87)$$

novamente com $\omega \neq -4/3$ e ϕ_0 indeterminado.

Isto resulta em

$$\rho^\phi = \frac{18 + 14\omega + 3\omega^2 - (12 + 8\omega)\sqrt{9 + 6\omega}}{8\pi(4 + 3\omega)^2 t^2}, \quad p^\phi = \frac{-21/2 - \omega + 3\omega^2 - (4 - 4\omega)\sqrt{9 + 6\omega}}{8\pi(4 + 3\omega)^2 t^2}, \quad (2.88)$$

e portanto

$$\gamma^\phi = \frac{6\omega^2 + 13\omega + 15/2 - (16 + 4\omega)\sqrt{9 + 6\omega}}{18 + 14\omega + 3\omega^2 - (12 + 8\omega)\sqrt{9 + 6\omega}}. \quad (2.89)$$

Tal como no caso da radiação, é visível que o limite $\omega \rightarrow \infty$ não recupera a Relatividade Geral. Por fim, para $\omega = -4/3$ temos

$$m = \frac{2}{3} \quad n = -1, \quad (2.90)$$

novamente com ϕ_0 indeterminado. Temos então

$$\rho^\phi = -\frac{1}{3\pi t^2}, \quad p^\phi = -\frac{1}{2\pi t^2}, \quad (2.91)$$

e assim

$$\gamma^\phi = \frac{5}{2}. \quad (2.92)$$

2.3.2. Limite de Campo fraco

Para estudarmos esta teoria no sistema solar é necessário considerar, tal como em Relatividade Geral, o limite de campo fraco. Consideramos uma perturbação $h_{\mu\nu}$ em torno da métrica de Minkowski, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.93)$$

Consideramos então apenas termos até à ordem de $h_{\mu\nu}$, e assim a métrica inversa é dada por

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (2.94)$$

Definindo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (2.95)$$

onde $h = h^\mu_\mu$, temos o tensor de Einstein em primeira ordem na perturbação da métrica como

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\sigma\rho}), \quad (2.96)$$

onde as derivadas covariantes foram substituídas por derivadas parciais por motivos de linearidade.

Consideramos também o campo escalar como uma perturbação em torno de um valor de background:

$$\phi = \phi_0 + \varphi. \quad (2.97)$$

Assim, em primeira ordem nas perturbações da métrica e campo escalar, e considerando as componentes do tensor energia-momento também como termos de primeira ordem (pequenas densidades), temos a equação (2.58) em primeira ordem :

$$-\frac{1}{2}(\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\sigma \partial_\mu \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial^\sigma \partial_\nu \bar{h}_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\sigma\rho}) = 8\pi\phi_0^{-1}T_{\mu\nu} + \phi_0^{-1}(\varphi_{,\mu,\nu} - \eta_{\mu\nu}\Box\varphi), \quad (2.98)$$

Temos no entanto ainda 4 graus e liberdade correspondentes à escolha de coordenadas (gauge). Aplicando uma transformação $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ (ξ um termo pequeno), exigimos que essa transformação seja tal que o novo $\bar{h}_{\mu\nu}$ obedeça a

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = \phi_0^{-1} \varphi_{,\nu}. \quad (2.99)$$

A equação (2.98) fica então

$$\square(\bar{h}_{\mu\nu} - \phi_0^{-1} \eta_{\mu\nu} \varphi) = -16\pi \phi_0^{-1} T_{\mu\nu}, \quad (2.100)$$

cujas solução é

$$\bar{h}_{\mu\nu} - \phi_0^{-1} \eta_{\mu\nu} \varphi = 4\phi_0^{-1} \int \frac{T_{\mu\nu}}{r} d^3x. \quad (2.101)$$

onde $T_{\mu\nu}$ deve ser avaliado no tempo retardado ($T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(t - r, \vec{x})$).

A equação de campo de ϕ dá

$$\square\varphi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega} T, \quad (2.102)$$

logo a perturbação do campo escalar é dada por

$$\varphi = -\frac{2}{3 + 2\omega} \int \frac{T}{r} d^3x \quad (2.103)$$

onde T é avaliado no tempo retardado. Ficamos então com a perturbação da métrica $h_{\mu\nu}$ dada por

$$h_{\mu\nu} = 4\phi_0^{-1} \int \frac{T_{\mu\nu}}{r} d^3x - 4\phi_0^{-1} \frac{1 + \omega}{3 + 2\omega} \eta_{\mu\nu} \int \frac{T}{r} d^3x. \quad (2.104)$$

Considerando uma fonte pontual e estática de poeira de massa M ($T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, 0, 0, 0)$ com $\rho = M\delta(r)$) temos

$$\phi = \phi_0 + \frac{2M}{(3 + 2\omega)r}, \quad (2.105)$$

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{\phi_0 r} \left[1 + \frac{1}{3 + 2\omega} \right], \quad g_{ii} = 1 + \frac{2M}{\phi_0 r} \left[1 - \frac{1}{3 + 2\omega} \right], \quad g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.106)$$

onde $i = 1, 2, 3$ e $\mu \neq \nu$.

Estes resultados podem ser usados para testar a teoria no sistema solar. Na secção 2.4.1 discuto (para teorias escalares-tensoriais) detalhadamente o formalismo pós-Newtoniano parametrizado (a dois parâmetros) que é usado para expandir as equações gravitacionais em ordem mais baixa, portanto, em campos fracos e baixas velocidades. Neste momento basta apenas referir que a constante entre parênteses retos na fórmula anterior de g_{00} pode ser facilmente medida a partir do *time delay* luz ao atravessar um campo gravítico (fraco). Esta experiência foi feita pela sonda Cassini que mediu o valor em questão [5] (que no formalismo pós-Newtoniano parametrizado denominamos γ). Chegou-se a

$$\gamma - 1 < 2.3 \times 10^{-5}. \quad (2.107)$$

Tal implica a condição

$$\omega > 40000, \quad (2.108)$$

o que claramente não trás diferenças significativas em relação à Relatividade Geral. No entanto essas diferenças podem existir em modificações da teoria de Brans-Dicke (secção 2.4). Nessas modificações o parâmetro de acoplamento ω pode tomar valores da ordem da unidade, pelo menos em determinadas alturas.

A transformação conforme é uma transformação aplicada à métrica que é bastante útil nas teorias escalares tensoriais, e será usada neste trabalho. A transformação é dada por

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (2.109)$$

onde Ω é uma função escalar do espaço-tempo. Para este trabalho é útil a transformação com $\Omega^2 = \phi$. De modo a ter $\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\sigma} = \delta_\nu^\sigma$ temos

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \phi^{-1} g^{\mu\nu}. \quad (2.110)$$

Temos também a relação

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \phi^2 \sqrt{-g}. \quad (2.111)$$

Chamamos referencial de Einstein ao espaço métrico $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e referencial de Jordan ao espaço métrico de $g_{\mu\nu}$. É importante notar que os dois espaços métricos possuem a mesma estrutura causal visto que os elementos de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ são proporcionais. Assim se $ds = 0$ num espaço métrico o mesmo acontece no outro (cones de luz iguais).

Escrevendo a conexão (2.9) em termos do novo espaço métrico $\tilde{g}_{\mu\nu}$ temos que

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \frac{1}{2} \left[\delta_\mu^\sigma \partial_\nu \ln \phi + \delta_\nu^\sigma \partial_\mu \ln \phi - g_{\mu\nu} \partial^\sigma \ln \phi \right], \quad (2.112)$$

e assim a derivada covariante no novo espaço métrico expressa-se como

$$\tilde{\nabla}_\mu A_\nu = \nabla_\mu A_\nu - C_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma, \quad C_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \left[\delta_\mu^\sigma \partial_\nu \ln \phi + \delta_\nu^\sigma \partial_\mu \ln \phi - g_{\mu\nu} \partial^\sigma \ln \phi \right], \quad (2.113)$$

onde $\tilde{\nabla}$ é o operador derivada covariante no espaço métrico $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e ∇ a derivada covariante no espaço métrico $g_{\mu\nu}$.

Demonstra-se [25] que o escalar de Ricci no novo espaço métrico, $\tilde{R} = \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu}$ relaciona-se com $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ na forma

$$R = \phi \left[\tilde{R} + 3\tilde{\square} \ln \phi - \frac{3}{2} \tilde{\nabla}_\mu \ln \phi \tilde{\nabla}^\mu \ln \phi \right] \quad (2.114)$$

onde está subentendido ($\tilde{\nabla}_\mu$) que a contração é feita com a métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

Temos então a acção de Brans-Dicke escrita no referencial de Einstein como

$$\tilde{S}[\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi, \psi] = \int \left[\tilde{R} - \frac{2\omega + 3}{2} \tilde{\nabla}_\mu \ln \phi \tilde{\nabla}^\mu \ln \phi \right] \sqrt{-\tilde{g}} d^4x + \int \mathcal{L}_M[\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi, \psi] d^4x \quad (2.115)$$

onde foi eliminado um termo de fronteira (derivada total). Definindo

$$d\varphi = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{2}} \frac{d\phi}{\phi}, \quad (2.116)$$

temos a acção:

$$\tilde{S}[\tilde{g}_{\mu\nu}, \varphi, \psi] = \int \left[\tilde{R} - \tilde{\nabla}_\mu \varphi \tilde{\nabla}^\mu \varphi \right] \sqrt{-\tilde{g}} d^4x + \int \mathcal{L}_M[\tilde{g}_{\mu\nu}, \varphi, \psi] d^4x. \quad (2.117)$$

A acção é a mesma, simplesmente escrita no referencial de Einstein. O mesmo naturalmente aplica-se à acção da matéria, o que leva a

$$\tilde{\mathcal{L}}_M = \mathcal{L}_M \Rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{L}_M = \sqrt{-g} L_M \Rightarrow \tilde{L}_M = \phi^{-2} L_M. \quad (2.118)$$

Temos assim

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\alpha\beta}} \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \phi^{-1} T_{\mu\nu}, \quad (2.119)$$

e assim

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} \tilde{T}_{\alpha\beta} = \phi^{-3} T^{\mu\nu}, \quad (2.120)$$

$$\tilde{T} = \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu} = \phi^{-2} T. \quad (2.121)$$

É importante agora calcular a divergência do tensor energia-momento no referencial de Einstein. Usando a relação entre os dois tensores energia-momento e a derivada covariante no referencial de Einstein calculada com (2.112), temos

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\mu \phi^{-3} T^{\mu\nu} = \phi^{-3} \nabla_\mu T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \phi^{-2} T \partial^\nu \ln \phi = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{2\omega+3}} \tilde{T} \partial^\nu \varphi. \quad (2.122)$$

Com esta expressão é claro que o tensor energia-momento no referencial de Einstein não tem divergência nula, a não ser no caso de radiação ou vazio. Diz-se que a lei de conservação de energia-momento é conformalmente invariante para $T = 0$. Esta não conservação (em geral) vem do acoplamento da matéria ao campo escalar no referencial de Einstein. Não se abandonou o Lagrangiano de matéria habitual do qual tirámos a lei de conservação, mas neste novo referencial existe uma troca de energia entre o campo escalar e a matéria, em troca do desacoplamento à curvatura como se pode ver em (2.117).

Variando a acção (2.117) em termos de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ temos

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\mu \varphi \tilde{\nabla}_\nu \varphi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\sigma \varphi \tilde{\nabla}^\sigma \varphi. \quad (2.123)$$

Variando agora em termos de φ temos

$$\tilde{\Box} \varphi = 8\pi \sqrt{\frac{2}{2\omega+3}} \tilde{T}. \quad (2.124)$$

2.3.4. Constante cosmológica

Exploro agora a hipótese de uma constante cosmológica na teoria de Brans-Dicke. Considere-se a seguinte acção :

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int \left[\phi R - 2\Lambda - \omega \phi^{-1} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + 16\pi L_M \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.125)$$

Verifica-se trivialmente que a equação de campo da métrica resulta em

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} - \Lambda \phi^{-1} g_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu}^\phi. \quad (2.126)$$

Olhando para (2.57) e para a equação anterior, vemos que Λ pode ser interpretado como uma energia do vácuo (parte do tensor $T_{\mu\nu}$). Ao contrário da Relatividade Geral, este termo não pode ser interpretado como um termo de curvatura.

Variando acção em termos de ϕ , e considerando a equação anterior, chegamos a

$$\square \phi = \frac{8\pi T - 4\Lambda}{3 + 2\omega}. \quad (2.127)$$

Vemos aqui que a constante cosmológica funciona como fonte para o campo escalar, e portanto, tem contribuições para a inércia das partículas do universo.

Considere-se agora outra acção :

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int \left[\phi(R - 2\Lambda) - \omega \phi^{-1} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + 16\pi L_M \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (2.128)$$

Agora a equação da métrica toma a forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu}^\phi. \quad (2.129)$$

Agora Λ não é visto como uma energia do vácuo, mas sim como um termo de curvatura. Pode no entanto também ser visto como um termo do tensor energia-momento do campo escalar (potencial). Para o campo escalar temos

$$\square \phi = \frac{8\pi T - 2\lambda\phi}{3 + 2\omega}. \quad (2.130)$$

Temos portanto uma equação de onda para ϕ substancialmente diferente dos casos anteriores pelo facto de neste caso o campo escalar já não se propagar á velocidade da luz - tem massa.

Considere-se agora para o caso do referencial de Einstein introduzindo um termo -2Λ . Este termo vem claramente da substituição $\tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$, e assim podemos interpretar a constante cosmológica como um termo de curvatura. A equação de campo da métrica fica

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu} - \Lambda \tilde{g}_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\mu \varphi \tilde{\nabla}_\nu \varphi - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\sigma \varphi \tilde{\nabla}^\sigma \varphi. \quad (2.131)$$

Vê-se trivialmente que equação de campo de φ não é alterada pela introdução de Λ visto que este termo, ao contrário da matéria, não está acoplado ao campo escalar. Recorde-se que neste referencial a matéria está acoplada ao campo escalar. Isto reforça a afirmação da constante cosmológica em (2.131) como um termo de curvatura - se fosse parte do tensor energia-momento deveria aparecer na equação de campo de φ o que não acontece.

Se agora, análogamente ao caso do referencial de Jordan, introduzirmos um termo $-2\Lambda\varphi$, a equação de campo da métrica fica

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu} - \Lambda \varphi \tilde{g}_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\mu \varphi \tilde{\nabla}_\nu \varphi - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\sigma \varphi \tilde{\nabla}^\sigma \varphi. \quad (2.132)$$

enquanto a equação de campo de φ fica

$$\tilde{\square}\varphi = 8\pi\sqrt{\frac{2}{2\omega+3}}\tilde{T} - 2\Lambda. \quad (2.133)$$

Por (2.132) vemos que agora a constante cosmológica não pode ser interpretada como um termo de curvatura (o campo está acoplado a Λ mas não a \tilde{R} na acção).

A equação (2.133) é similar a (2.127) onde se introduziu um termo -2Λ . Porém neste caso o termo introduzido também não pode ser considerado como um termo de matéria, como é visível em (2.132) pois não resulta da substituição $\tilde{T}_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{T}_{\mu\nu} - 2\Lambda\tilde{g}_{\mu\nu}$. Portanto neste referencial parece claro que apenas a introdução de um termo -2Λ ao Lagrangiano resulta numa constante cosmológica no mesmo sentido de em Relatividade Geral (termo de curvatura ou energia do vácuo).

Considere-se a teoria dada pela acção (2.128) numa cosmologia de FRW (2.13). Temos neste caso as equações

$$3H^2 + 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + 3\frac{k}{a^2} = \Lambda + 8\pi\frac{\rho}{\phi} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2, \quad (2.134)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + 2H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{k}{a^2} = \Lambda - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - 8\pi\frac{p}{\phi} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi}, \quad (2.135)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{2\phi\Lambda}{2\omega+3} = \frac{8\pi}{2\omega+3}(\rho - 3p). \quad (2.136)$$

Analisamos o caso $k = 0$ e $p = 0$ (poeira). Depois de algum trabalho algébrico com as equações de campo anteriores (ver [15]) podemos chegar a $a(0) = 0$ e normalizamos $\phi_0 = 1$

$$a(\tau) \propto \left(A \cosh(\tau) - \frac{4\pi}{\lambda} \right)^\xi \left[\frac{(4\pi/\Lambda + A) \tanh \frac{\tau}{2} - \sqrt{(4\pi/\Lambda)^2 - A^2}}{(4\pi/\Lambda + A) \tanh \frac{\tau}{2} + \sqrt{(4\pi/\Lambda)^2 - A^2}} \right]^\eta \quad (2.137)$$

onde se considerou Λ um termo muito pequeno e

$$A = \left[\left(\frac{4\pi}{\Lambda} \right)^2 - \frac{3(H_0 + \epsilon_0(1 + \omega))^2}{2\rho_0^2\Lambda(4 + 3\omega)} \right]^{1/2}, \quad (2.138)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{8 + 6\omega}{3 + 2\omega}}\sqrt{\Lambda}(t - t'), \quad t' = -\sqrt{\frac{32\omega}{8 + 6\omega}}\frac{2}{\sqrt{\Lambda}}\tanh^{-1} \left[\frac{4\pi/\Lambda - A}{4\pi + A} \right]^{1/2}, \quad (2.139)$$

$$\xi = \frac{1 + \omega}{4 + 3\omega}, \quad \eta = \frac{\epsilon_0 + H_0}{|\epsilon_0 + H_0|} \frac{1}{4 + 3\omega} \sqrt{\frac{3 + 2\omega}{3}}, \quad (2.140)$$

$$\epsilon = -\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)_0. \quad (2.141)$$

No limite de aproximação à Relatividade Geral temos $A = 4\pi/\Lambda$, $\xi = 1/3$, $\epsilon_0 = 0$, $\tau = \sqrt{3\Lambda}t$ e assim ficamos com

$$a(t) \propto \sinh^{2/3} \left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}t \right). \quad (2.142)$$

É possível encontrar uma equação que, dados os valores de H_0 , $q_0 = -(a\ddot{a}/\dot{a}^2)_0$, ρ_0 e ω , nos dá o valor da constante cosmológica numa equação de segunda ordem

$$\begin{aligned}
& \Lambda^2 + \frac{2\omega + 3}{2(\omega + 1)^2} \left[2(\omega + 1)q_0 H_0^2 - (2\omega + 1)(2\omega + 3)\omega^{-1} H_0^2 + \frac{16\pi\rho_0(\omega + 1)^2}{2\omega + 3} \right] \Lambda = \\
& = \frac{4\pi\rho_0(2\omega + 3)}{(\omega + 1)^2} (1 - (q_0 - 2)(\omega + 1)) - \frac{1}{4} q_0^2 H_0^4 \left(\frac{2\omega + 3}{\omega + 1} \right)^2 + \frac{(2\omega + 3)^3}{2\omega(\omega + 1)^2} (q_0 - 1) H_0^4 - 16\pi^2 \rho_0^2.
\end{aligned} \tag{2.143}$$

2.4. Teorias de Brans-Dicke generalizadas

Como foi visto no capítulo anterior, os constrangimentos na teoria de Brans-Dicke exigem que esta esteja muito próxima da Relatividade Geral ($\omega \gg 1$).

Um modo de explicar isto e manter a essência da teoria consiste em fazer com que ω não seja uma constante mas uma função do campo escalar [30]. A ideia é que $\omega \rightarrow \phi_0 \gg 1$ ou mesmo $\omega \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ de modo a que as observações de hoje no sistema solar sejam respeitadas, mas que a teoria tenha sido significativamente diferente da Relatividade Geral no passado.

A acção fica então

$$S = \int \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \right] \sqrt{-g} d^4x + \int L_M \sqrt{-g} d^4x. \tag{2.144}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \phi_{,\sigma} \phi^{,\sigma}) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi), \tag{2.145}$$

$$\square \phi = \frac{8\pi}{2\omega(\phi)} T - \frac{\omega'(\phi)}{2\omega + 3} \phi_{,\sigma} \phi^{,\sigma}. \tag{2.146}$$

Outra ideia de respeitar as experiências no sistema solar é de que o campo escalar tenha massa. Se esta massa for suficientemente grande [19] os efeitos do campo escalar serão de curto alcance e assim as observações no sistema solar não serão suficientemente precisas para distingui-la da Relatividade Geral.

Isto é feito portanto, introduzindo um potencial do campo escalar no lagrangiano. A acção fica assim

$$S = \int \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - 2U(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x + \int L_M \sqrt{-g} d^4x. \tag{2.147}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \phi_{,\sigma} \phi^{,\sigma}) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi) - g_{\mu\nu} \frac{U(\phi)}{\phi}, \tag{2.148}$$

$$\square \phi = \frac{8\pi}{2\omega(\phi) + 3} T - \frac{1}{3 + 2\omega} \left[\phi \frac{dU(\phi)}{d\phi} - 2U(\phi) \right]. \tag{2.149}$$

Ao mesmo tempo que esta teoria respeita as observações no sistema solar, o potencial permite explicar a energia escura (sem recorrer assim à introdução ad hoc de uma constante cosmológica) dado que a pressão do campo escalar pode ser negativa. Efectivamente neste caso, a densidade de energia e pressão do campo escalar, são dados respectivamente por

$$\rho_\phi = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - 3H \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) + \frac{U(\phi)}{\phi} \right], \quad (2.150)$$

$$\rho_\phi = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 2H \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - \frac{U(\phi)}{\phi} \right]. \quad (2.151)$$

Podemos então considerar simultâneamente as duas modificações anteriores - ω a variar para um campo escalar com massa :

$$S = \int \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - 2U(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x + \int L_M \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.152)$$

Esta é a acção das teorias escalares-tensoriais (ou teorias de Brans-Dicke generalizadas). É este o grupo de teorias sobre o qual me debruço nos próximos capítulos, dando ênfase ao caso do potencial quadrático. As equações de campo ficam

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \phi_{,\sigma} \phi^{,\sigma}) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi) - g_{\mu\nu} \frac{U(\phi)}{\phi}, \quad (2.153)$$

$$\square \phi = \frac{8\pi}{2\omega(\phi) + 3} T - \frac{1}{3 + 2\omega} \left[\phi \frac{dU(\phi)}{d\phi} - 2U(\phi) \right] - \frac{\omega'(\phi)}{2\omega + 3} \phi_{,\sigma} \phi^{,\sigma}. \quad (2.154)$$

Neste género de teorias é extremamente útil considerar a transformação conforme anteriormente discutida ($\tilde{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$). Definindo φ como na equação (2.116) (agora com $\omega = \omega(\phi)$) ficamos com

$$S = \tilde{S} = \int \left[\tilde{R} - \tilde{\nabla}_\mu \varphi \tilde{\nabla}^\mu \varphi - 2V(\varphi) \right] \sqrt{-\tilde{g}} d^4x + \tilde{S}_M, \quad (2.155)$$

onde temos o potencial neste referencial dado por

$$V(\varphi) = \frac{U(\phi(\varphi))}{\phi^2(\varphi)}. \quad (2.156)$$

Temos assim as equações de campo :

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} = 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\mu \varphi \tilde{\nabla}_\nu \varphi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\sigma \varphi \tilde{\nabla}^\sigma \varphi - V(\varphi) \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (2.157)$$

$$\tilde{\square} \varphi - \frac{dV}{d\varphi}(\varphi) = 8\pi \sqrt{\frac{2}{2\omega + 3}} \tilde{T}, \quad (2.158)$$

2.4.1. Cosmologia FRW

Consideramos agora esta teoria numa cosmologia FRW (2.13) e consideramos (como usual) a matéria como um fluido perfeito de equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, onde consideramos $0 \leq \gamma \leq 2$. Temos as equações

$$\left(\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}\right)^2 + \frac{k}{\tilde{a}^2} = \frac{8\pi}{3}\tilde{\rho} + \frac{\dot{\varphi}^2}{6} + \frac{1}{3}V(\varphi), \quad (2.159)$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\tilde{H} = \frac{d}{d\tilde{t}}\left(\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}\right) = -4\pi(\tilde{\rho} + \tilde{p}) - \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \quad (2.160)$$

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}\dot{\varphi} = -\frac{dV}{d\varphi}(\varphi) - 8\pi\sqrt{\frac{2}{2\omega + 3}}(-\tilde{\rho} + 3\tilde{p}). \quad (2.161)$$

onde o ponto $\dot{}$ corresponde á derivação em relação a $d\tilde{t} = \sqrt{\phi}dt$.

A densidade de energia e pressão do fluido no referencial de Einstein, usando (2.119), relacionam-se com os mesmos parâmetros no referencial de Jordan por

$$\tilde{\rho} = \phi^{-2}\rho, \quad \tilde{p} = \phi^{-2}p. \quad (2.162)$$

Como temos $\rho \propto a^{-3\gamma}$ e $\tilde{a} = \sqrt{\phi}a$, (2.161) fica

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}\dot{\varphi} = -\frac{dV}{d\varphi}(\varphi) - \tilde{a}^{-3\gamma}\frac{dm}{d\varphi}(\varphi), \quad (2.163)$$

onde

$$m(\varphi) = \mu_0\phi^{(3\gamma-4)/2}(\varphi), \quad (2.164)$$

em que $\mu_0 = \rho a^{3\gamma}$ é uma constante (pois $\rho \propto a^{-3\gamma}$).

É importante verificar que existem condições para as teorias escalares tensoriais convergirem assintoticamente para a Relatividade Geral (com uma certa constante cosmológica). Se considerarmos as variáveis adimensionais dadas por

$$x = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{6}H}, \quad y = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}H}, \quad K = \frac{k}{(aH)^2}, \quad (2.165)$$

e usando as equações de campo chegamos ao sistema dinâmico [13]

$$x' = x \left[3x^2 - 3 + \frac{3\gamma}{2}(1 - x^2 - y^2 + K) \right] - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial_\varphi V}{V} \right) y^2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial_\varphi m}{m} \right) (1 - x^2 - y^2 + K) - xK, \quad (2.166)$$

$$y' = y \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial_\varphi V}{V} \right) x - K + 3x^2 + \frac{3\gamma}{2}(1 - x^2 - y^2 + K) \right], \quad (2.167)$$

$$\varphi' = \sqrt{6}x, \quad (2.168)$$

$$K' = -K \left[2 - 6x^2 - 3\gamma(1 - x^2 - y^2 + K) + K \right], \quad (2.169)$$

onde ' corresponde à derivação em relação a $d\tau = da/a$. Note-se que o limite $\varphi \rightarrow \infty$ pode ser considerado neste sistema dinâmico desde que $\partial_\varphi V/V$ e $\frac{\partial_\varphi m}{m}$ converjam. Note-se que em termos da variável $\psi = \varphi^{-1}$ a equação (??) fica escrita na forma

$$\psi' = -\sqrt{6}\psi^2 x. \quad (2.170)$$

Quando $\varphi = \infty$ temos $\psi = 0$ e assim ψ é constante, o que trivialmente implica que $\varphi' = 0$ e assim é possível encontrar novos pontos de equilíbrio. Tratamos primeiro o sistema dinâmico para φ finito e posteriormente para φ infinito.

Procure-se então os pontos fixos deste sistema. Olhe-se para o caso mais simples e natural de $K = 0$. Neste caso o sistema fica reduzido a três dimensões. Note-se que podemos ter $K = 0$ e $k \neq 0$, desde que no ponto de equilíbrio em questão $|\dot{a}| \rightarrow \infty$, o que claramente é satisfeito para um universo em aceleração.

Para φ finito a equação (2.168) exige que $x = 0$. neste caso temos dois pontos fixos. O primeiro tem $x = 0$, $y = 1$, e $\varphi = \varphi_0$ tal que $\partial_\varphi V(\varphi_0) = 0$. Como o campo escalar é constante e o potencial em geral é não nulo, tal corresponde ao universo de de Sitter. Este ponto fixo é uma espiral estável se $\partial_\varphi^2 V(\varphi_0) > {}^9V(\varphi_0)/12$, um nodo estável se $0 < \partial_\varphi^2 V(\varphi_0) < {}^9V(\varphi_0)/12$ e um nodo instável se $\partial_\varphi^2 V(\varphi_0) < 0$. Recorde-se que consideramos $0 \leq \gamma \leq 2$.

O outro ponto fixo tem $x = 0$, $y = 0$, e $\varphi = \varphi_0$ tal que $\partial_\varphi m(\varphi_0) = 0$. Este ponto fixo é uma espiral estável se $\partial_\varphi^2 m(\varphi_0) > \frac{(3-3\gamma/2)^2 m(\varphi_0)}{12}$, um nodo estável se $0 < \partial_\varphi^2 m(\varphi_0) < \frac{(3-3\gamma/2)^2 m(\varphi_0)}{12}$ e um nodo instável se $\partial_\varphi^2 m(\varphi_0) < 0$.

Para $\varphi = \infty$ definimos $W = \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\partial_\varphi V}{V}$ e $Z = \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{\partial_\varphi m}{m}$. Temos neste caso os pontos :

- $x = \pm 1$, $y = 0$. Para $x = 1$ o ponto é um nodo estável para $Z < -3(2 - \gamma)$ e $W < -3$, uma sela se apenas uma destas condições não for satisfeita, e um nodo instável se $Z > -3(2 - \gamma)$ e $W > -3$. Para $x = -1$ o ponto é estável para $Z < 3(2 - \gamma)$ e $W < 3$, uma sela se apenas uma destas condições não for satisfeita, e um nodo instável se $Z > 3(2 - \gamma)$ e $W > 3$.

- $x = -W/3$, $y = 0$. Pela primeira equação de Friedmann sabemos que $1 - x^2 - y^2 \propto \rho \geq 0$, o que leva à condição $|W| \leq 3$. Para $|W| < 3$ o ponto é instável para $\gamma \neq 0$, sendo uma sela se $W_- \leq W \leq W_+$ e um nodo instável se $W < W_-$ ou $W > W_+$, onde

$$W_\pm = \frac{Z \pm \sqrt{Z^2 + 9(1 - \gamma/2)(3 + \gamma)}}{3 + \gamma}. \quad (2.171)$$

Caso $\gamma = 0$ o ponto é um nodo estável se $W_- \leq W \leq W_+$ e um nodo instável se $W < W_-$ ou $W > W_+$. Para $W = \pm 1$ ocorre a fusão com o ponto $x = \mp 1$ visto anteriormente. Para $W = 3$ o ponto é um nodo estável se $Z < -3(2 - \gamma)$ e um nodo instável caso $Z > -3(2 - \gamma)$. Para $W = 3$ o ponto é um nodo estável se $Z < 3(2 - \gamma)$ e um nodo instável caso $Z > 3(2 - \gamma)$.

- $x = -2Z/(6-3\gamma)$, com $\gamma \neq 2$. A condição $\rho \geq 0$ leva a $|Z| \leq 3(2-\gamma)/2$.

Suponhamos que $|Z| < 3(2-\gamma)/2$. Neste caso o ponto é uma sela se $W < W_0$ e um nodo instável se $W > W_0$, onde

$$W_0 = -\frac{3}{2} \left[2 - \frac{3}{2Z} \gamma(2 - \gamma) + \frac{2}{3} Z \frac{\gamma}{2 - \gamma} \right]. \quad (2.172)$$

Se $|Z| = 3(2-\gamma)/2$ ocorre a fusão com o ponto $x = \mp 1$ visto anteriormente. Neste caso este ponto é um nodo instável.

- $x = 0$, $y = 0$. Este ponto vem de fazer $Z = 0$ e $\gamma = 2$ no ponto anterior. Este ponto é um nodo instável.

- $x = \frac{3\gamma/2}{Z-W}$, $x^2 + y^2 = \frac{3x+Z}{Z-W}$, $Z \neq W$. A condição $\rho \geq 0$ leva a

$$0 \leq x^2 + y^2 = \frac{9\gamma/2 + Z(Z - W)}{(Z - W)^2} \leq 1. \quad (2.173)$$

Neste caso o estudo da estabilidade do ponto fixo é de enorme complexidade, como se pode verificar substituindo os valores de x e y no Jacobiano para o ponto fixo, não sendo possível obter analiticamente relações entre os parâmetros do sistema para determinar a natureza do ponto fixo.

Para $W = Z$ o ponto fixo fica com $x = -W/3$ e $y^2 = 1 - W^2/6$. Para $y^2 \geq 0$ temos que ter $|W| \leq 6$. Com esta condição fica automaticamente satisfeito $\rho \geq 0$.

2.4.2. Invariância conforme do potencial

É também interessante verificar se a forma funcional do potencial do campo escalar pode ser preservada na transformação para o referencial de Einstein.

Assuma-se que $U(\phi)$ tem uma certa dependência funcional em ϕ dada pela função $f(\phi)$. Assim, para que $V(\varphi)$ tenha a mesma dependência em φ temos $V(\varphi) = f(\varphi)$. Usando a definição $V(\varphi) = U(\phi)/\phi^2$ e diferenciando em relação a φ

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{df(\phi)}{d\phi} \frac{1}{\phi^2} - 2 \frac{f(\phi)}{\phi^3}. \quad (2.174)$$

Assim, usando (2.116) com $\omega = \omega(\phi)$, temos que

$$2\omega(\phi) + 3 = 2 \left(\frac{d\varphi}{d\phi} \right)^2 = \frac{2}{\phi^2} \left[\frac{f(\phi)/d\phi}{df(\varphi)/d\varphi} - 2 \frac{f(\phi)/\phi}{df(\varphi)/d\varphi} \right]^2. \quad (2.175)$$

Destes resultados podemos ver que não existe nenhuma teoria escalar-tensorial para a qual a constante cosmológica é conformalmente transformada numa constante cosmológica. Por outras palavras, se temos uma constante cosmológica, por exemplo no referencial de Einstein, então não existe $\omega(\phi)$ para o qual temos uma constante cosmológica no referencial de Jordan, e vice-versa. Deveras se $f = \Lambda$ é constante e exigimos $V(\varphi) = \Lambda = U(\phi)$, obteríamos uma equação impossível para um campo dinâmico : $V = U/\phi^2 \Rightarrow \phi^2 = 1$, independentemente da correspondência entre ϕ e φ .

Se, de uma forma mais geral, procurarmos um potencial com duas formas funcionais diferentes, i.e. $V(\varphi) = g(\varphi)$ and $U(\phi) = f(\phi)$, temos

$$2\omega(\phi) + 3 = \frac{2}{\phi^2} \left[\frac{df(\phi)/d\phi}{dg(\varphi)/d\varphi} - 2 \frac{f(\phi)/\phi}{dg(\varphi)/d\varphi} \right]^2. \quad (2.176)$$

Estes resultados mostram em particular como a invariância conforme do potencial é dependente da teoria que abordamos. Mais especificamente, depende do parâmetro de acoplamento $\omega(\phi)$.

Uma equação útil para usar em casos particulares é

$$\varphi(\phi) = g^{-1} \left(\frac{f(\phi)}{\phi^2} \right). \quad (2.177)$$

Se tivermos $U(\phi) \propto \phi^A$ e procuramos por $V(\varphi) \propto \varphi^B$, onde A e B são constantes, derivamos

$$\varphi \propto \phi^{(A-2)/B}, \quad \text{e} \quad (2.178)$$

$$2\omega(\phi) + 3 \propto 2 \left(\frac{A-2}{B} \right)^2 \phi^{2(A-2)/B}. \quad (2.179)$$

Neste caso é claro que para cada potencial de potencial nula temos uma, e só uma, teoria $\omega(\phi)$ bem definida na qual esse potencial é conformalmente invariante.

Para o potencial quadrático no referencial de Jordan (que será considerado nos próximos capítulos), a teoria requerida é $\omega = -3/2$, um caso bastante particular que, como já referido, exclui de toda a análise (nas análises seguintes considero sempre $\omega(\phi) > -3/2$), já que neste caso a dinâmica do campo escalar é indeterminada. Da definição (2.116), apenas quando $\omega(\phi) \neq -3/2$ podemos determinar a estabilização do campo escalar no referencial de Jordan a partir da estabilização do campo escalar no referencial de Einstein. É possível mostrar que o caso $\omega = -3/2$ corresponde a uma ação totalmente invariante para transformações conformes para vácuo e radiação.

Por exemplo, considere-se a teoria de Bekenstein [10], associada com

$$2\omega(\phi) + 3 = 3 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_0} \right)^{-1}. \quad (2.180)$$

Neste caso temos (fazendo $\phi_0 = 1$)

$$\varphi(\phi) = -\sqrt{6} \tanh^{-1} \sqrt{1 - \phi}, \quad (2.181)$$

o que implica

$$\phi(\varphi) = 1 - \tanh^2 \left(\frac{\varphi}{\sqrt{6}} \right), \quad (2.182)$$

onde os limites de integração encontram-se implícitos na equação por $\phi(\varphi = 0) = 1$

Segue então, para $g(\varphi) = f(\varphi)$, que

$$f(\varphi) = \frac{f(1 - \tanh^2(\varphi/\sqrt{6}))}{(1 - \tanh^2(\varphi/\sqrt{6}))^2}. \quad (2.183)$$

Usando esta equação podemos deduzir algumas propriedades da forma funcional de f para a invariance conforme do potencial. A mais óbvia é que é uma função par. Seguem outras propriedades. Por exemplo, na origem temos

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= 0 \text{ (se } n \text{ é ímpar)}, & f(0) &= f(1), \\ f''(0) &= -\frac{1}{3}(f'(1) - 2f(1)), & \dots, \end{aligned} \quad (2.184)$$

e também os limites

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} f(\varphi) = \begin{cases} +\infty & \text{se } f(0) > 0, \\ -\infty & \text{se } f(0) < 0. \end{cases} \quad (2.185)$$

2.4.3. O potencial e a atracção à Relatividade Geral

Considere-se a equação de campo de φ (2.163) na presença de um fluido de radiação. Considere-se também, sem perda de generalidade, que φ está próximo de um valor φ_0 , ou seja,

$$\varphi(\tilde{t}) = \varphi_0 + \psi(\tilde{t}), \quad (2.186)$$

onde $\psi(\tilde{t})$ é um termo pequeno (de primeira ordem). Introduzindo esta relação em (2.163) e mantendo os termos lineares em ψ [11], obtemos

$$\ddot{\psi} + 3\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} + b\psi = 0, \quad (2.187)$$

onde $b = d^2V(\varphi_0)/d\varphi^2$.

Queremos ver em que condições temos $\lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} \varphi = \varphi_0$. Para que tal aconteça é obvio antes de mais que devemos ter $dV(\varphi_0)/d\varphi = 0$. Também, para que o campo se aproxime de φ_0 ou por outras palavras, que $\psi \rightarrow 0$, devemos procurar em que condições (2.187) é a equação de um oscilador harmónico amortecido. Essas condições são $\dot{\tilde{a}}(\varphi_0) > 0$. Resumindo as três condições, temos que o universo (em $\varphi = \varphi_0$) deve encontrar-se em expansão (no referencial de Einstein) e φ_0 deve ser um mínimo do potencial V . Traduzindo estas condições para o referencial de Jordan temos $(\phi(\varphi_0) = \phi_0)$

$$\frac{\dot{a}}{a}(t = \infty) > -\frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}}{\phi}(t = \infty), \quad (2.188)$$

$$\frac{dU(\phi_0)}{d\phi} = 2\frac{U(\phi_0)}{\phi_0}, \quad (2.189)$$

$$\frac{d^2U(\phi_0)}{d\phi^2} > 2\frac{U(\phi_0)}{\phi_0^2}. \quad (2.190)$$

Isto implica que $U(\phi_0)$ não tem de ser um mínimo, mas se for, tais equações implicam que $U(\phi_0) = 0$.

Este calculo foi feito para um fluido com $\gamma = 4/3$. Para outro fluido com $\gamma > 0$, a equação (2.163) apresenta um termo proporcional a $a^{-3\gamma}$, pelo que a análise anterior permanece válida se podermos afirmar que $a^{6\gamma} \gg \mu/\phi_0^3$.

Para o caso $\gamma = 0$ (falso vácuo) a equação (2.163) fica

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}\dot{\varphi} = -\frac{d}{d\varphi}[m(\varphi) + V(\varphi)] \equiv -\frac{d}{d\varphi}Z(\varphi). \quad (2.191)$$

Portanto a dinâmica do campo escalar é governada pelo potencial efectivo $Z(\varphi)$, e assim, de acordo com a análise anterior, temos que para $\varphi \rightarrow \varphi_0$ devemos ter Z a atingir um mínimo em φ_0 .

Para $\gamma = 0$ temos $m(\varphi) \propto \phi^{-2}(\varphi)$. Pela definição de φ (2.116) temos que quando φ cresce, o mesmo acontece com ψ (assumimos $\phi > 0$), sendo assim m é uma função decrescente de φ . Sendo assim, para Z ter um mínimo, o potencial V deve ser uma função crescente de φ (e assim também uma função crescente de ϕ).

Note-se que a análise feita aqui é independente da forma de $\omega(\phi)$ (recorde-se que assumimos sempre $\omega(\phi) > -3/2$), o que confere uma grande generalidade a esta análise.

É possível reescrever as equações de campo (2.159) e (2.161) para o caso $\gamma = 4/3$ e $V = \beta = \text{constante}$, na forma [11]

$$\frac{1}{2}X'^2 + \mathcal{U}(X) = \frac{f^2}{2}, \quad (2.192)$$

$$Y'X = f, \quad (2.193)$$

onde $X = \tilde{a}^2$, $Y = (2/3)^{1/2}\varphi, (r)$ representa a derivação em relação ao tempo conforme $d\eta = dt/a = d\tilde{t}/\tilde{a}$, f é uma constante de integração e $\mathcal{U}(X) = -\frac{2}{3}\beta X^3 + 2kX^2 - 2\mu X$. Olhando para a equação (2.192) vemos que corresponde à equação de um sistema conservativo com potencial \mathcal{U} e energia $f^2/2$.

Olhando para a equação (2.193) vemos que quando X diverge então $Y \rightarrow \text{constante}$, ou seja, aproximamo-nos da Relatividade Geral. Para $f = 0$ temos sempre a Relatividade Geral. Note-se que pela definição do tempo conforme, este cresce se e só se o tempo cosmico também cresce.

Este potencial ($V = \beta$) corresponde ao potencial quadrático no referencial de Jordan, o potencial que será analisado no próximos dois capítulos.

Considere-se primeiro o caso de universo plano $k = 0$. Dado que $\mu > 0$ o potencial só tem um mínimo (e também um máximo) para $\beta < 0$. Este mínimo está localizado a X_+ e o máximo a X_- , onde

$$X_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{\beta}} \quad (2.194)$$

Se $f^2/2 < U(X_-)$ e $X(0) > X_-$ então X oscila em torno do mínimo (X_+). Como $X_- < 0$ e $X_+ > 0$ temos que durante a oscilação, X passa entre valores positivos e negativos. Dada a definição $X = \phi a^2$ temos que deve ser ϕ que está a trocar de sinal. Se não forem satisfeitas ambas as condições anteriores temos que X acaba por cair para $-\infty$.

No caso $\mu = 0$ não existe mínimo (nem máximo) e ficamos com $X \rightarrow -\infty$.

Se $\beta \geq 0$ temos que X diverge sempre (para $+\infty$) e assim a teoria tende para a Relatividade Geral com constante cosmológica β .

Para $k = 1$, se $\beta < 0$ \mathcal{U} tem um mínimo a X_- e máximo a X_+ , onde

$$X_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \beta\mu}}{\beta}. \quad (2.195)$$

Neste caso a oscilação em torno do mínimo ocorre se $f^2/2 < U(X_+)$ e $X(0) > X_+$. Novamente $X_+ < 0$ e $X_- > 0$ e assim ϕ passa entre valores positivos e negativos. Se não forem satisfeitas ambas as condições anteriores temos que X acaba por cair para $-\infty$.

Se $\beta = 0$ então X oscila sempre em torno do mínimo absoluto de \mathcal{U} em $X = \mu/2$. Neste caso devemos ter $f^2/2 \geq \mathcal{U}(\mu/2)$. Se $X(0) > \mu$ ou $X(0) < 0$ então X oscila entre valores positivos e negativos.

Se $0 < \beta < \mu^{-1}$, novamente X_- corresponde ao mínimo e X_+ máximo. Neste caso $X_+ > 0$ e $X_- > 0$, então a oscilação ocorre em valores positivos de ϕ . Esta oscilação ocorre se $f^2/2 < U(X_+)$ e $X(0) < X_+$. Se não forem satisfeitas ambas as condições anteriores temos que X acaba por cair para $+\infty$.

Se $\beta \geq \mu^{-1}$ então não existe mínimo (nem máximo) e assim $X \rightarrow +\infty$.

Por fim para $k = -1$, se $\beta < 0$ \mathcal{U} tem um mínimo a X_- e máximo a X_+ , onde

$$X_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \beta\mu}}{\beta}. \quad (2.196)$$

Neste caso a oscilação em torno do mínimo ocorre se $f^2/2 < U(X_+)$ e $X(0) > X_+$. Novamente $X_+ < 0$ e $X_- > 0$ e assim ϕ passa entre valores positivos e negativos. Se não forem satisfeitas ambas as condições anteriores temos que X acaba por cair para $-\infty$.

Se $\beta = 0$ então X oscila sempre em torno do mínimo absoluto de \mathcal{U} em $X = -\mu/2$. Neste caso devemos ter $f^2/2 \geq \mathcal{U}(-\mu/2)$. Se $X(0) > 0$ ou $X(0) < -\mu$ então X oscila entre valores positivos e negativos.

Se $0 < \beta < \mu^{-1}$, novamente X_- corresponde ao mínimo e X_+ máximo. Neste caso $X_+ < 0$ e $X_- < 0$, então a oscilação ocorre em valores negativos de ϕ . Esta oscilação ocorre se $f^2/2 < U(X_+)$ e $X(0) < X_+$. Se não forem satisfeitas ambas as condições anteriores temos que X acaba por cair para $+\infty$.

Se $\beta \geq \mu^{-1}$ então não existe mínimo (nem máximo) e assim $X \rightarrow +\infty$.

No próximo capítulo apresento os diversos diagramas do espaço de fases ($X, Y=X'$) para radiação e vácuo ($\mu = 0$). Discuto também as soluções possíveis (soluções exactas) e o respectivo comportamento cosmológico.

3. POTENCIAL QUADRÁTICO - SOLUÇÕES EXACTAS

Usando as variáveis definidas anteriormente, as duas equações de Friedmann e a equação de campo de ϕ podem ser escritas na forma

$$(X')^2 + 4kX^2 - (Y'X)^2 = 4MX \left(\frac{X}{\phi} \right)^{(4-3\gamma)/2} + \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} \right) X^3, \quad (3.1)$$

$$(Y'X)' = M(4-3\gamma) \sqrt{\frac{3}{2\omega(\phi)+3}} \left(\frac{X}{\phi} \right)^{(4-3\gamma)/2} + \frac{2X^2}{\sqrt{2\omega(\phi)+3}} \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{d\lambda}{d\phi} \right), \quad (3.2)$$

e

$$X'' + 4kX = 3M(2-\gamma) \left(\frac{X}{\phi} \right)^{(4-3\gamma)/2} + 2X^2 \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} \right), \quad (3.3)$$

onde $U(\phi) \equiv \lambda(\phi)\phi$, $M \equiv 8\pi\rho_0/3$ e $'$ corresponde à derivação em relação a $d\eta = dt/a$.

Consideramos a partir de agora o potencial quadrático, ou seja $\lambda(\phi) = \beta\phi$, com $\beta = \text{const.}$.

É interessante verificar que a equação (3.2) é a mesma para vácuo ($M = 0$) e radiação ($\gamma = 4/3$). Para ambos os casos podemos usar

$$(X')^2 + 4kX^2 - (Y'X)^2 = 4MX + \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} \right) X^3, \quad (3.4)$$

$$(Y'X)' = \frac{2X^2}{\sqrt{2\omega(\phi)+3}} \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{d\lambda}{d\phi} \right), \quad (3.5)$$

e

$$X'' + 4kX = 2M + 2X^2 \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} \right). \quad (3.6)$$

Como referido, neste capítulo (e também no próximo) considero o potencial quadrático ($U(\phi) = \beta\phi^2$). Para radiação e vácuo a equação (3.5) reduz-se a

$$Y'X = f = \text{constante.} \quad (3.7)$$

Usando isto na equação (2.116) ficamos com (recorde-se que $Y \equiv (2/3)^{1/2}\varphi$)

$$Y \equiv \int \sqrt{\frac{2\omega+3}{3}} \frac{d\phi}{\phi} = \int \frac{f}{X(\eta)} d\eta \equiv I(\eta). \quad (3.8)$$

No que se segue, estarei focado neste potencial numa cosmologia de vácuo ou radiação (e matéria stiff, como veremos a seguir).

A equação (3.4) pode ser resolvida com funções elípticas (ou de Jacobi) ou funções elípticas de Weierstrass. Irei usar as funções elípticas no caso de vácuo, dado ser mais simples determinar os zeros do polinómio interveniente em (3.4), dado que distingimos os casos $k = -1, 0, 1$. No caso de radiação temos outro parâmetro (densidade de energia) e assim, para abreviar, irei evitar calcular os zeros e simplesmente usar as funções de Weierstrass. O comportamento qualitativo neste último caso já terá sido coberto no caso de vácuo.

3.1. Dualidade vácuo-stiff

Existe outro caso notável em que temos uma simplificação considerável das equações anteriores : matéria tipo stiff ($\gamma = 2$). As equações ficam

$$(X')^2 + 4kX^2 - (Y'X)^2 = 4M\phi + \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} \right) X^3, \quad (3.9)$$

$$(Y'X)' = -2M \sqrt{\frac{3}{2\omega + 3}} \left(\frac{\phi}{X} \right) + \frac{2X^2}{\sqrt{2\omega(\phi) + 3}} \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{d\lambda}{d\phi} \right). \quad (3.10)$$

e

$$X'' + 4kX = 2X^2 \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} \right), \quad (3.11)$$

Verificamos que a última equação reduz-se à equação correspondente para o vácuo, e assim o comportamento do factor de escala é o mesmo para os dois casos.

À primeira vista parece, pela equação (3.10) que o acoplamento entre as equações de X e Y não depende simplesmente de $\lambda(\phi)$ como anteriormente, mas também no traço do tensor energia-momento. Deveras, na equação (3.10) o primeiro termo vem do traço do tensor energia-momento, e é em geral não nulo. Porém existe uma dualidade subjacente com o vácuo, e após uma redifinição apropriada do campo escalar Y , é possível desacoplar as equações. A equação (3.11) resulta em

$$(X')^2 + 4kX^2 = A + 4 \int \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} \right) X^2 X' d\eta \quad (3.12)$$

(A uma constante de integração), pelo que combinando com a equação (3.9) derivamos

$$(Y'X)^2 = A - 4M\phi - \frac{4}{3} \int X^3 \left(\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} - \frac{\lambda(\phi)}{\phi} \right) \frac{d\phi}{\phi} \quad (3.13)$$

e para $\lambda(\phi) \propto \phi$ esta equação resulta em

$$\frac{Y'}{\sqrt{A - 4M\phi}} = \frac{1}{X(\eta)} \quad (3.14)$$

e vemos que novamente existe um desacoplamento entre X e o campo escalar redefinido $Z(\phi)$ definido por $Z' = Y'/\sqrt{A - 4M\phi}$, de modo a que temos

$$Z(\phi) \equiv \int \sqrt{\frac{2\omega + 3}{3(A - 4M\phi)}} \frac{d\phi}{\phi}. \quad (3.15)$$

Temos assim $Z'X = 1$, e assim a redefinição

$$\omega_{\text{stiff}} = \left(\omega_{\text{vac}} + \frac{3}{2} \right) (A - 4M\phi) - \frac{3}{2}, \quad (3.16)$$

leva o caso de matéria stiff com $\omega = \omega_{\text{stiff}}$ para o modelo vácuo com $\omega = \omega_{\text{vac}}$.

Sendo assim, o comportamento do campo escalar e factor de escala no caso stiff (com $\omega = \omega_{\text{stiff}}(\phi)$) é o mesmo que no vácuo, só que com $\omega = \omega_{\text{vac}}(\phi)$, desde que $\phi \leq A/4M$ seja satisfeito. Portanto a análise do caso stiff no referencial de Einstein é a mesma que para o vácuo, dado que $\omega(\phi)$ importa apenas na passagem para o referencial de Jordan (para calcular $\varphi(\phi)$, ou $\phi(\varphi)$).

É importante notar que A pode ser negativo apenas se $k = -1$, o que inevitavelmente significa que ϕ (e assim G) é sempre negativo. No entanto, independentemente do sinal de A , ϕ torna-se deveras negativo nos modelos de matéria stiff, independentemente do valor de k .

Esta dualidade é um resultado muito importante, que pode ser entendido de melhor forma do ponto de vista da teoria conformemente transformada (referencial de Einstein). Neste ponto de vista as equações de campo são as da Relatividade Geral mais dois fluidos a interagir, um dos quais está associado ao campo escalar (ϕ no referencial de Jordan) e o outro resultante do fluido de matéria original (referencial de Jordan). Quando o potencial $U(\phi)$ é nulo o campo escalar tem massa nula, e assim, comporta-se como um fluido stiff ($\gamma = 2$), e como o fluido de matéria também é stiff, temos dois fluidos do tipo stiff a interagir [14]. Como a interação é definida via $\omega(\phi)$, é assim possível redefinir o campo escalar de tal forma a combinar os dois fluidos num só, precisamente o que é dado pela equação (3.15).

Como se pode deduzir, por exemplo pela equação (3.2) ou (3.13), este resultado estende-se naturalmente para o caso do potencial quadrático ($\lambda \propto \phi$). Este é um resultado geral, não estando restrito aos modelos FRW. É deveras válido para qualquer modelo escalar-tensorial com um potencial quadrático e um fluido stiff, independentemente da métrica.

É neste ponto interessante notar que, quando $\phi \rightarrow A/4M$ recuperamos o limite da Relatividade Geral, e que $\omega_{\text{stiff}} = 0$ quando

$$\omega_{\text{vac}} = \frac{3}{2} \frac{(A - 1) - 4M\phi}{A - 4M\phi}, \quad (3.17)$$

e que $\omega_{\text{vac}} = 0$ quando

$$\omega_{\text{stiff}} = -\frac{3}{2} [(A - 1) - 4M\phi]. \quad (3.18)$$

3.2. Soluções exactas de vazio em Relatividade Geral ($f = 0$)

É imediato entender que o caso $f = 0$ corresponde à Relatividade Geral (e o mesmo acontece para o caso de radiação que será posteriormente explorado). Deveras, a partir da definição de X e φ e da equação (3.7), vemos que $\dot{\phi} = 0$ o que significa que $\phi = \phi_0 = G_0^{-1} = 1$, e assim temos $X(\eta) = a^2(\eta)$. Segue também que $U(\phi)$ torna-se uma constante cosmológica. Apresento as soluções cosmológicas para este caso.

As soluções de vácuo vão ser portanto as soluções usuais de de Sitter. De facto, a partir da equação (3.4) derivamos

$$\int_{X(\eta_0)}^{X(\eta)} \frac{dX}{X \sqrt{\frac{\beta}{3} X - k}} = \pm 2(\eta - \eta_0). \quad (3.19)$$

Depois de uma manipulação simples, obtemos os casos para diferentes valores da curvatura espacial k (para cada caso seleccionamos o $X(\eta_0)$ que torna as expressões mais simples).

3.2.1. Caso $k = -1$

Para $k = -1$, dado $X > 0$ temos, com $X(\eta_0) = +\infty$ (limite do integral)

$$\begin{aligned} X(\eta) &= \frac{3}{\beta} [\coth^2(\eta - \eta_0) - 1] \\ &= \frac{3}{\beta} \frac{1}{\sinh^2(\eta - \eta_0)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Voltando ao tempo cósmico temos

$$\begin{aligned} t(\eta) &= \sqrt{\frac{3}{\beta}} \int \frac{1}{\sinh(\eta - \eta_0)} d\eta \\ &= \sqrt{\frac{3}{2\beta}} \ln \left(\frac{\cosh(\eta - \eta_0) - 1}{\cosh(\eta - \eta_0) + 1} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

que pode ser invertido para

$$\cosh(\eta(t) - \eta_0) = -\coth \sqrt{\frac{\beta}{3}} t. \quad (3.22)$$

e assim temos $\sinh(\eta(t) - \eta_0) = 1/\sinh\left(\sqrt{\frac{\beta}{3}} t\right)$. Colocando este resultado em (3.20) leva a

$$X(t) = \frac{3}{\beta} \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{3}} t \right), \quad (3.23)$$

e assim $\sqrt{X(t)} = a(t) \sim \exp\left(\sqrt{\frac{\beta}{3}} t\right)$ quando $t \rightarrow \infty$, como esperado.

3.2.2. Caso $k = 0$

Para $k = 0$ ($X(\eta_0) = +\infty$)

$$X(\eta) = \frac{3}{\beta} (\eta - \eta_0)^{-2}. \quad (3.24)$$

e assim

$$t(\eta) = \int \sqrt{\frac{3}{\beta}} |\eta - \eta_0|^{-1} d\eta = \sqrt{\frac{3}{\beta}} \ln |\eta - \eta_0|, \quad (3.25)$$

que leva a

$$a \propto \exp \left(-\sqrt{\frac{\beta}{3}} t \right), \quad (3.26)$$

onde o expoente tem um sinal negativo pois quando $\eta \rightarrow \eta_0$ temos $X \rightarrow +\infty$ em (3.24) e $t \rightarrow -\infty$ em (3.25). Temos assim um tempo cósmico com sinal trocado num universo de de Sitter.

3.2.3. Caso $k = +1$

Para $k = +1$

$$X(\eta) = \frac{3}{\beta} [\tan^2(\eta - \eta_0) + 1] = \frac{3}{\beta} \frac{1}{\cos^2(\eta - \eta_0)}, \quad (3.27)$$

e assim

$$t(\eta) = \sqrt{\frac{3}{\beta}} \int \frac{d\eta}{\cos(\eta - \eta_0)} = \sqrt{\frac{3}{\beta}} \ln \sqrt{\frac{1 + \sin \eta}{1 - \sin \eta}}. \quad (3.28)$$

Isto leva a

$$\sin(\eta(t) - \eta_0) = \tanh\left(\sqrt{\frac{\beta}{3}}t\right), \quad (3.29)$$

e conseqüentemente

$$X(t) = \frac{3}{\beta} \cosh^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{3}}t\right). \quad (3.30)$$

3.3. O caso de vácuo com $f \neq 0$

Considero agora o caso $f \neq 0$, que é o caso em que características escalares-tensoriais emergem. A equação (3.4) com $M = 0$ fica

$$(X')^2 + 4kX^2 - (Y'X)^2 = \frac{4}{3}\beta X^3, \quad (3.31)$$

que, usando (3.7), leva à quadratura

$$\pm 2\sqrt{\frac{\beta}{3}}(\eta - \eta_0) \equiv \pm(\tau - \tau_0) = \int_{X(\tau_0)}^{X(\tau)} \frac{dX}{\sqrt{X^3 - \frac{3k}{\beta}X^2 + \frac{3f^2}{4\beta}}}. \quad (3.32)$$

As diferentes soluções possíveis dependem do espectro de raízes do polinómio cúbico que surge no lado direito da equação anterior. Se fizermos a mudança de variável $X = x + \frac{k}{\beta}$ na raiz quadrada ficamos com o polinómio $x^3 + px + q$ com

$$p = -3\left(\frac{k}{\beta}\right)^2, \quad q = \frac{3\beta}{4}\left(\frac{f}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{k}{\beta}\right)^3, \quad (3.33)$$

e o discriminante

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2. \quad (3.34)$$

Se $\Delta \geq 0$, todas as raízes são reais, e usamos o método trigonométrico para as encontrar. São elas

$$X_n = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) - \frac{2\pi}{3}n\right] + \frac{k}{\beta}, \quad (3.35)$$

onde $n = 1, 2, 3$ e $X_0 \geq X_1 \geq X_2$.

Se $\Delta < 0$ existe apenas uma raiz real dada por

$$\tilde{X}_0 = -2\frac{|q|}{q}\sqrt{\frac{-p}{3}} \cosh\left[\frac{1}{3} \cosh^{-1}\left(\frac{-3|q|}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right] + \frac{k}{\beta}. \quad (3.36)$$

Se $\Delta > 0$ temos $f^2 < \frac{16}{3}\frac{k}{\beta^2}$. Se $k = -1$ ou $k = 0$ temos sempre $\Delta < 0$, e só existem soluções nas quais X é ilimitado.

No que se segue discuto em detalhe as soluções exactas. Em paralelo apresento o diagrama de fases do sistema. Nestes diagramas distingo três tipos de regiões :

Região I - Nesta região as trajetórias são fechadas. Corresponde a soluções oscilatórias em torno de $X = 0$.

Região II - Nesta região as trajetórias colapsam desde $X = \infty$ para um valor mínimo voltando para $X = \infty$.

Região III - As soluções nesta região correspondem a trajetórias que colapsam desde $X = \infty$ expandindo novamente até ao infinito, passando por valores negativos. Se excluirmos valores negativos de X esta região corresponde a soluções que colapsam até $X = 0$, ou soluções que expandem desde $X = 0$ até ao infinito.

Estas regiões são apresentadas nos diversos diagramas de fase das figuras 8, 9 e 10.

3.3.1. Região I e II: O caso $k = +1$ e $\Delta > 0$

Como foi visto anteriormente, se $\Delta > 0$ então $f^2 < \frac{16}{3\beta^2}$. Neste caso temos três raízes distintas do polinómio cúbico em (3.32). É também possível verificar que $X_2 < 0$.

Consideramos X na região $X \geq X_0$, i.e., $X(\tau_0) \geq X_0$ e, por razões de simplicidade, escolhemos ¹ $X(\tau_0) = X_0$. Temos então

$$\begin{aligned} \pm(\tau - \tau_0) &= \int_{X_0}^{X(\tau)} \frac{dX}{\sqrt{(X - X_0)(X - X_1)(X - X_2)}} \\ &= g \operatorname{sn}^{-1} \left(\sqrt{\frac{X - X_0}{X - X_1}} \middle| m^2 \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

e assim, após inversão, derivamos

$$X(\tau) = \frac{X_1 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| m^2 \right) - X_0}{\operatorname{sn}^2 \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| m^2 \right) - 1} = \frac{X_0 - X_1 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| m^2 \right)}{\operatorname{cn}^2 \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| m^2 \right)}, \quad (3.38)$$

onde $\operatorname{sn}(\dots|m^2)$ é o seno de Jacobi, $m^2 = \sqrt{\frac{X_1 - X_2}{X_0 - X_2}}$ o módulo elíptico, e $g = \frac{2}{\sqrt{X_0 - X_2}}$ (ver Apendice).

Usando a equação (3.8) temos ²

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \frac{f}{X_0} \int \frac{\operatorname{cn}^2 \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \right)}{1 - \delta^2 \operatorname{sn}^2 \left[\frac{\tau - \tau_0}{g} \right]} d\tau \\ &= g \frac{f}{X_0} \left[\frac{\tau - \tau_0}{g} + (\delta^2 - 1) \Pi \left(\operatorname{am} \frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| \delta^2 \middle| m^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde $\operatorname{cn}(\dots|m^2)$ é o cosseno de Jacobi, $\operatorname{am}(\dots|m^2)$ é a amplitude de Jacobi (o segundo argumento não é apresentado por brevidade - está implícito), Π é o integral elíptico de terceira espécie, e $\delta^2 \equiv \frac{X_1}{X_0}$. As equações (3.38) e (3.39) definem as soluções na forma paramétrica.

¹ Para qualquer outro valor de $X(\tau_0) > X_0$ dividimos a integração na forma $\int_{X_0}^X \dots - \int_{X_0}^{X(\tau_0)} \dots$

² Obviamente uma constante de integração está implícita. Tomamos τ_0 como o limite inferior de integração. Por simplicidade tomamos as constantes de integração como nulas, considerando apenas a função primitiva do integrando.

Considerando agora o limite de integração $X(\tau_0) = +\infty$ temos

$$X(\tau) = X_2 + \frac{X_0 - X_2}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| m^2\right)}, \quad (3.40)$$

com m^2 e g dados da mesma forma que anteriormente, e

$$I(\tau) = g \frac{f}{X_2} \left[\Pi\left(\operatorname{am} \frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| \delta^2 \middle| m^2\right) - F\left(\operatorname{am} \frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| m^2\right) \right]. \quad (3.41)$$

com F o integral elíptico de primeira espécie, e $\delta^2 \equiv \frac{-X_2}{X_0 - X_2}$. Como é facilmente observado, a função $I(\tau)$ é monótona crescente se $f > 0$ e monótona decrescente se $f < 0$.

Outra região onde podemos ter X é $X_2 \leq X \leq X_1$. Simplificamos com $X(\tau_0) = X_2$, e a solução fica

$$X(\tau) = (X_1 - X_2) \operatorname{sn}^2\left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| m^2\right) + X_2, \quad (3.42)$$

e

$$I(\tau) = \frac{gf}{X_2 - X_1} \Pi\left(\operatorname{am} \frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| \delta^2 \middle| m^2\right). \quad (3.43)$$

onde $\delta^2 \equiv \frac{X_2 - X_1}{X_2}$. Neste caso, como a raiz mais pequena X_2 é sempre negativa, temos X a trocar periodicamente de sinal. Pela definição de X sabemos que deve ser ϕ que troca de sinal. Note-se que temos assim $\delta^2 > 1$. Vemos este comportamento na figura 4. Assim, dada esta oscilação, se o factor de escala aumenta globalmente, o campo ϕ encontra-se numa oscilação amortecida, e se o factor de escala decresce globalmente, então ϕ oscila com amplitude crescente.

É importante notar que na equação anterior de $I(\tau)$, o integral elíptico de terceira espécie tem no seu integrando (ver apêndice) uma função que diverge para um limite de integração superior (primeiro argumento de Π) suficientemente grande (isto quando temos $\delta^2 > 1$). Esta divergência ocorre periodicamente (no primeiro argumento). Dado isto, devemos considerar o valor principal de Cauchy na definição deste integral (ver (A5) em apêndice). O mesmo acontece para os outros casos em que X tem zeros.

A figura 2 corresponde a soluções dadas pela equação (3.38). Estes são universos que contraem desde $X = +\infty$ até um valor finito de positivo de X , voltando para $+\infty$, tudo isto num tempo conforme finito. Tal implica que a ou ϕ (ou ambos) vai para infinito, o que obviamente exige um tempo cósmico infinito. Sendo assim, pela definição de tempo conforme $d\eta = dt/a$, isto só pode acontecer se o factor de escala (no referencial de Jordan) aumentar de forma acelerada no tempo cósmico t (pelo menos quando $t \rightarrow \infty$). Existe uma replicação destes eventos de contração e colapso no referencial de Einstein. No entanto, para o referencial de Jordan, apenas uma réplica importa - o universo mantém-se nessa réplica durante um tempo cósmico infinito, o tempo que demora a expandir até ao infinito (ou a contrair desde o infinito).

No caso em que X está limitado, podemos ainda ter um factor de escala a a evoluir para infinito. Isto pode acontecer quando o factor de escala $a(t)$ cresce de forma não acelerada, tomando formas como por exemplo $a(t) \propto t^k$, ($1 \geq k > 0$). Para isto acontecer, dado X ser limitado, devemos ter $\phi(\tau) \rightarrow 0$.

3.3.2. Região III: Caso $k = +1$ e $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$ ($f^2 > \frac{16}{3\beta}$), a equação (3.36) dá uma raiz real³ de modo a que neste caso apenas temos $X \geq \tilde{X}_0$ para uma solução real.

³ as restantes raízes são complexas e podem ser escritas na forma :

$$\tilde{X}_{\pm} = \gamma \pm i\alpha, \quad (3.44)$$

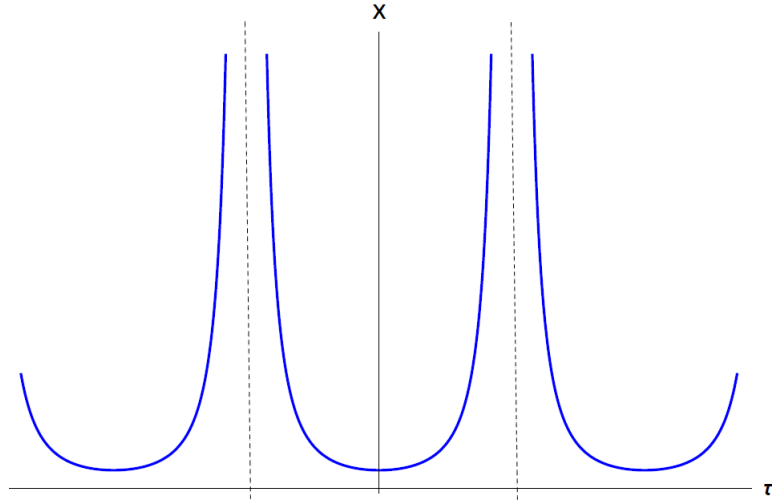


Figura 2: Comportamento qualitativo de $X(\tau)$ em (3.38) para $f = 0$, evoluindo para infinito de tal forma a que $a(t)$ acelera. Por simplicidade, em todos os plots uso $\tau_0 = 0$. Nos restantes gráficos, a não ser que seja dito o contrário, considera-se $f > 0$.

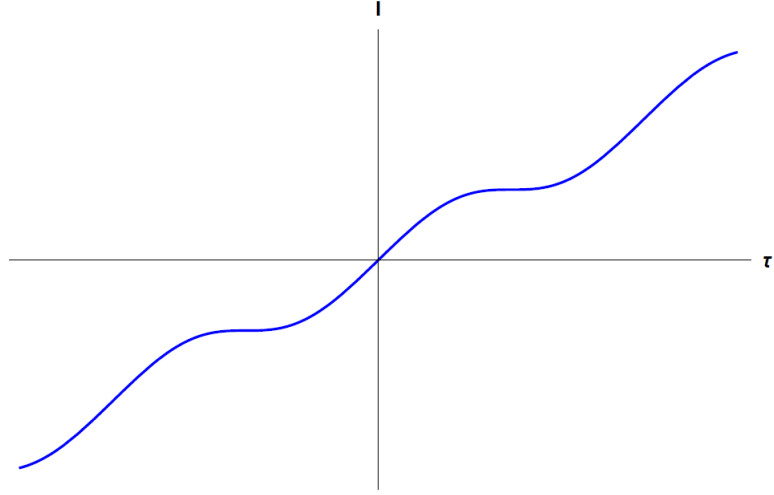


Figura 3: Comportamento qualitativo de $I(\tau)$ correspondendo a da figura 2. I vai evoluir para um ponto estacionário (o primeiro à direita da origem) quando $t \rightarrow \infty$.

Tomando $X(\tau_0) = \tilde{X}_0$ temos

$$X(\tau) = \frac{A + \tilde{X}_0 + (\tilde{X}_0 - A) \operatorname{cn} \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} |m^2 \right)}{1 + \operatorname{cn} \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} |m^2 \right)}, \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &\equiv (\operatorname{Im} \tilde{X}_{\pm})^2 = \frac{3}{4} \tilde{X}_0^2 - \frac{9}{\beta^2} - \frac{3}{2\beta} \tilde{X}_0, \\ \gamma &\equiv \operatorname{Re} \tilde{X}_{\pm} = -\frac{1}{2} \left(\tilde{X}_0 - \frac{3}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

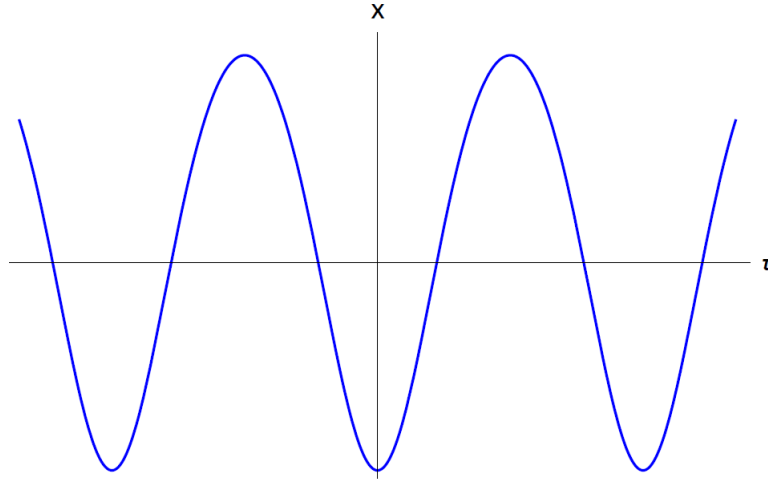


Figura 4: Comportamento qualitativo de $X(\tau)$ em (3.42).

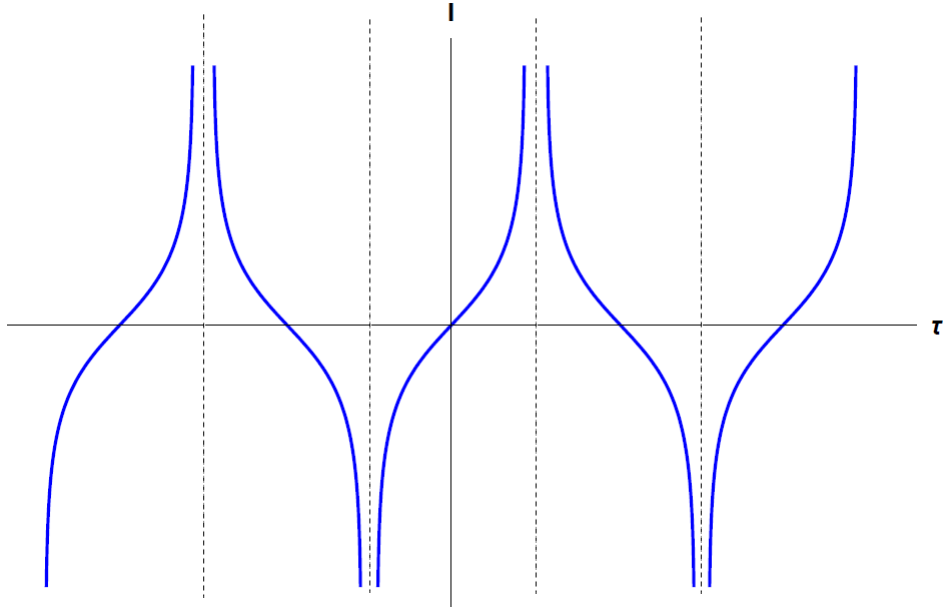


Figura 5: Comportamento qualitativo de $I(\tau)$ correspondendo a X da figura 4. Neste caso considerou-se $f < 0$.

onde temos definido

$$g = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad (3.47)$$

$$A = \sqrt{(\tilde{X}_0 - \gamma)^2 + \alpha^2}, \quad (3.48)$$

$$m^2 = \sqrt{\frac{A + \gamma - \tilde{X}_0}{2A}}. \quad (3.49)$$

Então a solução para $I(\tau)$ é

$$I(\tau) = \frac{fg}{\tilde{X}_0 - A} \left[\frac{\tau - \tau_0}{g} - \frac{1}{1 + \delta} \left(\Pi \left(\operatorname{am} \frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| \frac{\delta^2}{\delta^2 - 1} \middle| m^2 \right) - \delta f_1 \right) \right], \quad (3.50)$$

com

$$\delta = \frac{\tilde{X}_0 - A}{\tilde{X}_0 + A}. \quad (3.51)$$

e

$$f_1 = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\delta^2}{m^4+m'^4\delta^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{m^4+m'^4\delta^2}{1-\delta^2}} \text{sd} \left(\frac{\tau-\tau_0}{g} \right) \right], & \text{para } \frac{\delta^2}{\delta^2-1} < m^4, \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta^2-1}{m^4+m'^4\delta^2}} \ln \left[\frac{P+Q}{P-Q} \right], & \text{para } \frac{\delta^2}{\delta^2-1} > m^4, \end{cases}$$

onde, $P \equiv \sqrt{m^4 + m'^4\delta^2} \text{dn}((\tau - \tau_0)/g)$, $Q \equiv \sqrt{\delta^2 - 1} \text{sn}((\tau - \tau_0)/g)$, $m'^4 \equiv 1 - m^4$, $\text{sd}(\dots) \equiv \frac{\text{sn}(\dots)}{\text{dn}(\dots)}$ e $\text{dn}(\dots)$ é a função delta de Jacobi.

Por outro lado, se $X(\tau_0) = +\infty$, temos

$$X(\tau) = \frac{A + \tilde{X}_0 + (A - \tilde{X}_0) \text{cn} \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| m^2 \right)}{1 - \text{cn} \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| m^2 \right)}, \quad (3.52)$$

$$I(\tau) = \frac{fg}{A - \tilde{X}_0} \left[-\frac{\tau - \tau_0}{g} + \frac{1}{1 - \delta} \left(\Pi \left(\text{am} \frac{\tau - \tau_0}{g} \middle| \frac{\delta^2}{\delta^2 - 1} \middle| m^2 \right) - \delta f_1 \right) \right], \quad (3.53)$$

com

$$\delta = \frac{A - \tilde{X}_0}{\tilde{X}_0 + A}. \quad (3.54)$$

Neste caso, e no que se segue, a raiz real é negativa. Consequentemente temos soluções cosmológicas que atravessam o eixo $X = 0$ (apenas duas vezes).

O comportamento qualitativo de $X(\tau)$ encontra-se representado na figura 6, e como mencionado correspondem à região III do diagrama de fases. A característica mais notória é que X muda de sinal, o que implica que ϕ muda de sinal ($+$ \rightarrow $-$ \rightarrow $+$). Estas cosmologias são conhecidas como *bounce cosmologies*, que têm um *bounce* (no referencial de Einstein) na região negativa de ϕ . Estas soluções permitem no entanto o caso em que o universo contrai até $a = 0$ (ou com uma diferente escolha de condições iniciais, expandir desde $a = 0$).

Nestes casos em que X troca de sinal, e assim temos (pelo menos) ϕ a passar por 0, I apresenta uma assíntota. Isto é visível na figura 7. Com as constantes de integração escolhidas I parte de 0 até ∞ o que se deve a ϕ passar por 0. Apesar de I divergir nesta altura, as quantidades físicas (no referencial de Jordan) não divergem. Esta divergência nasce apenas da escolha da constante de integração e do modo como esta função foi definida (3.8).

Veja-se que com outros valores iniciais poderíamos ter (por exemplo) a função X a “partir” desde 0 (não exigindo assim troca de sinal de ϕ) e expandindo até $+\infty$. Isto pode acontecer com o factor de escala a partir de 0.

Nos casos em que $X \rightarrow \infty$, dada a sua definição ($X = \phi a^2$), qualquer que seja a função $\omega(\phi)$, ϕ não deve decrescer mais rápido que a^{-2} . Nestes casos (em que $X \rightarrow \infty$), $I(\tau)$ tende para um valor constante e assim temos uma teoria assintoticamente igual à Relatividade Geral, i.e., o campo escalar no referencial de Jordan aproxima-se de uma constante $\phi_0 = G^{-1}$. Vemos isto a partir da definição de I , dada por (3.8) e a nossa consideração prévia de que ω não toma nem se aproxima do valor $-3/2$, e assim a raiz quadrada em (3.8) não vai contribuir para a convergência no tempo do integral. Note-se que assim $\phi(\tau) \rightarrow \text{const}$ é a única possibilidade para $I(\tau) \rightarrow \text{const}$. Esta discussão diz-nos que $I(\tau)$ aumenta em segmentos que são iguais, portanto esta função também tem réplicas, em concordância com $X(\tau)$. O universo aproxima-se de um ponto estacionário de $I(\tau)$ a partir da réplica que escolhemos. A escolha da réplica não tem efeito nas variáveis do referencial de Jordan a e ϕ - tem que ver apenas com a escolha do valor inicial de τ (a escolha de τ_0 corresponde à réplica central nos gráficos exibidos).

Sabemos também da equação (3.8), que quando ϕ (e assim X) e f são positivos, então I cresce quando ϕ cresce e vice-versa. Quando ϕ é negativo isso troca, i.e., I cresce quando ϕ decresce, e vice-versa. Isto tudo troca novamente se f é negativo.

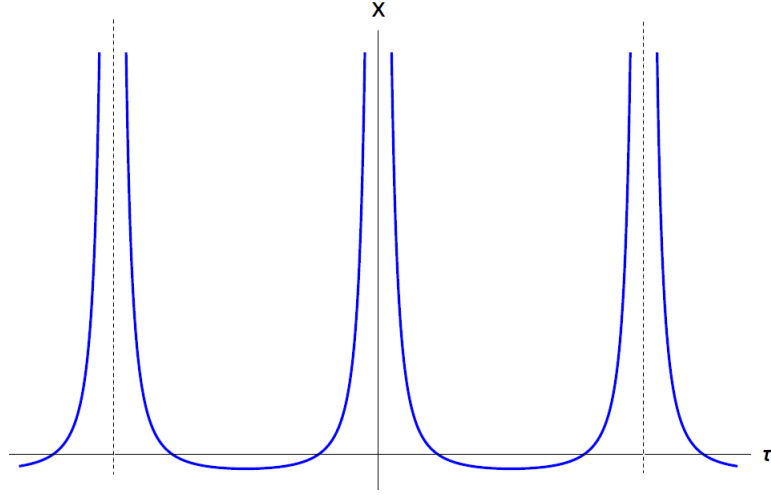


Figura 6: O mesmo comportamento qualitativo que na figura 2 mas quando X muda de sinal (3.52).

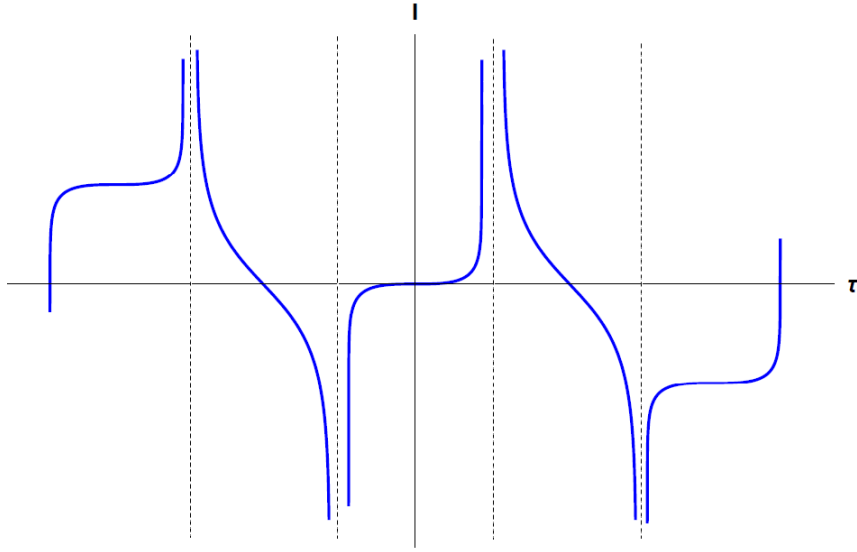


Figura 7: Comportamento qualitativo de $I(\tau)$ correspondendo a X da figura 6. I diverge quando X vai para zero.

3.3.3. Caso $k = +1$ e $\Delta = 0$

Consideramos o caso restante onde $\Delta = 0$ (i.e., $f^2 = \frac{16}{3\beta}$). Este caso corresponde à separatriz que delimita as três regiões. Neste caso temos duas raízes distintas, uma das quais tem multiplicidade 2 :

$$X_0 = X_1 = \frac{2}{\beta} \quad , \quad X_2 = -\frac{1}{\beta}. \quad (3.55)$$

No domínio $X_0 \geq X \geq X_2$ (tomamos $X(\tau_0) = X_2$) temos então

$$X(\tau) = (X_0 - X_2) \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{X_0 - X_2}}{2} (\tau - \tau_0) \right) + X_2, \quad (3.56)$$

e

$$I(\tau) = f \int \frac{d\tau}{(X_0 - X_2) \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{X_0 - X_2}}{2} (\tau - \tau_0) \right) + X_2}, \quad (3.57)$$

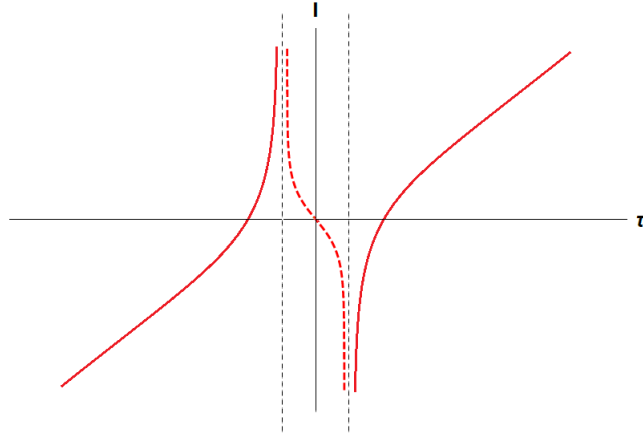


Figura 8: Comportamento qualitativo de $I(\tau)$ correspondendo a X em (3.56).

Escrevendo $\tau' = \frac{\sqrt{X_0 - X_2}}{2}(\tau - \tau_0)$ ficamos com

$$\begin{aligned} I(\tau') &= \frac{f}{\sqrt{3}} \left[\tau' - \tanh^{-1} \left(\sqrt{3} \tanh(\tau') \right) \right], & |\tau'| < \tanh^{-1}(1/\sqrt{3}); \\ I(\tau') &= \left[\tau' - \coth^{-1} \left(\sqrt{3} \tanh(\tau') \right) \right], & |\tau'| > \tanh^{-1}(1/\sqrt{3}). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Agora, se $X \geq X_0$ (neste caso tomamos $X(\tau_0) = +\infty$) que dá

$$X(\tau) = (X_0 - X_2) \coth^2 \left(\frac{\sqrt{X_0 - X_2}}{2}(\tau - \tau_0) \right) + X_2, \quad (3.59)$$

e assim

$$I(\tau') = \left[\tau' - \tanh^{-1} \left(\frac{\tanh(\tau')}{\sqrt{3}} \right) \right]. \quad (3.60)$$

Para este caso de $k = 1$ o espaço de fases é apresentado na figura 10. Verificamos que a separatriz ($\Delta = 0$) passa pelo ponto $(2/\beta, 0)$ (que se encontra entre a região I e II) e por um ponto com $X < 0$ (campo escalar negativo) nomeadamente $(-1/\beta, 0)$. Verifica-se que a região I contém (apenas) trajectórias onde X troca de sinal (conforme indicado nas soluções dadas por (3.42)). As trajectórias na região III passam por valores negativos, conforme indicado pela equação (3.52). Por fim na região II as trajectórias correspondem a *bounce cosmologies* como indicado na equação (3.38), vindo desde o infinito até um factor de escala finito, voltando posteriormente para o infinito.

3.3.4. Caso $k = -1$

Como já foi referido neste caso só podemos ter $\Delta < 0$, com a raiz real dada por

$$\tilde{X}_0 = -\frac{2}{\beta} \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{q}{2\beta^3} \right) \right] - \frac{1}{\beta}. \quad (3.61)$$

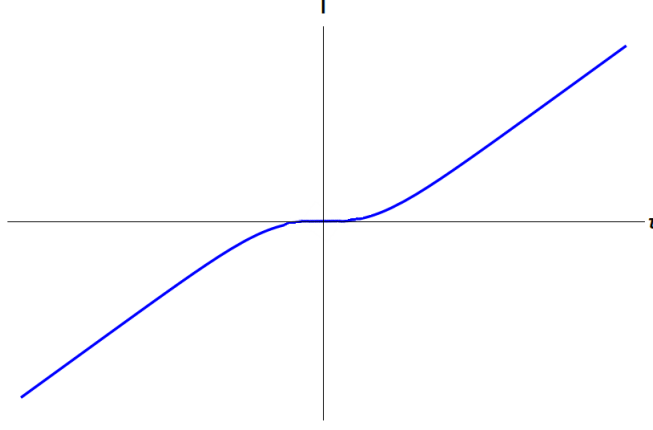


Figura 9: Comportamento qualitativo de $I(\tau)$ correspondendo a X em (3.59).

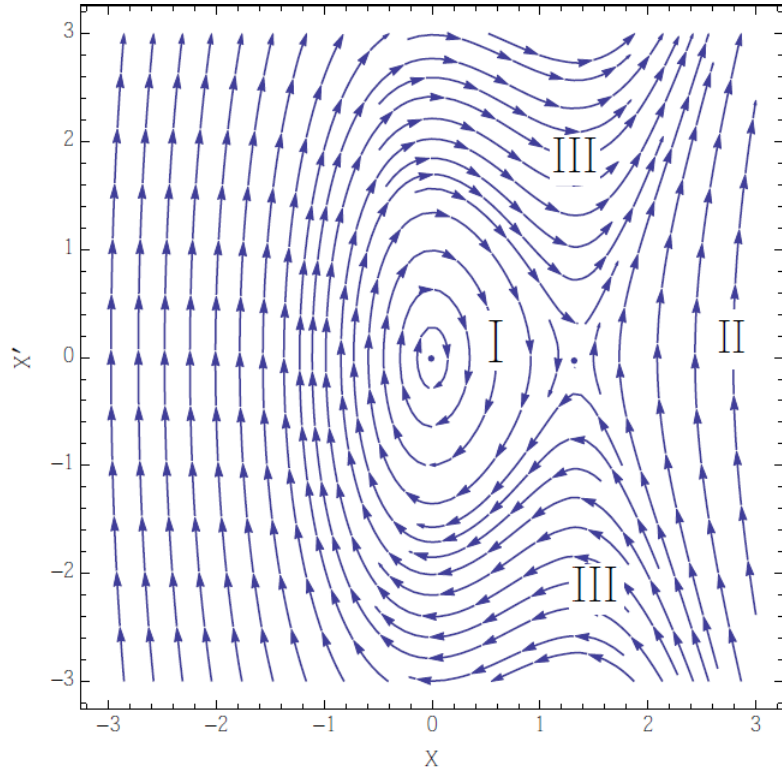


Figura 10: Diagrama de fases para um universo vazio com $k = 1$.

E assim as soluções são dadas pelas mesmas expressões que para o caso $k = 1$ e $\Delta < 0$ (mas com valores diferentes para as raízes, como é obvio).

O espaço de fases para este caso é apresentado na figura 11. Vemos que para $k = -1$, temos uma separatriz que passa pelo ponto $(0,0)$. A linha integral que vem de baixo do ponto, e parte de cima do mesmo, é uma separatriz que limita a região I, que está composta de linha integrais fechadas em $X < 0$. No entanto, neste caso, as linhas integrais da região I correspondem a $f^2 < 0$, e são assim não-físicas. As regiões II e III correspondem a soluções inteiramente admissíveis. A região II corresponde a soluções que colapsam do infinito para um factor de escala finito ou expandam de um factor de escala finito para o infinito. Por fim a região III corresponde a soluções que colapsam para um valor negativo de X ou expandam desde um valor negativo de X . Se exigimos $\phi > 0$ estas vão corresponder a modelos que colapsam para um factor de escala nulo, ou expandindo desse mesmo factor de escala nulo para infinito.

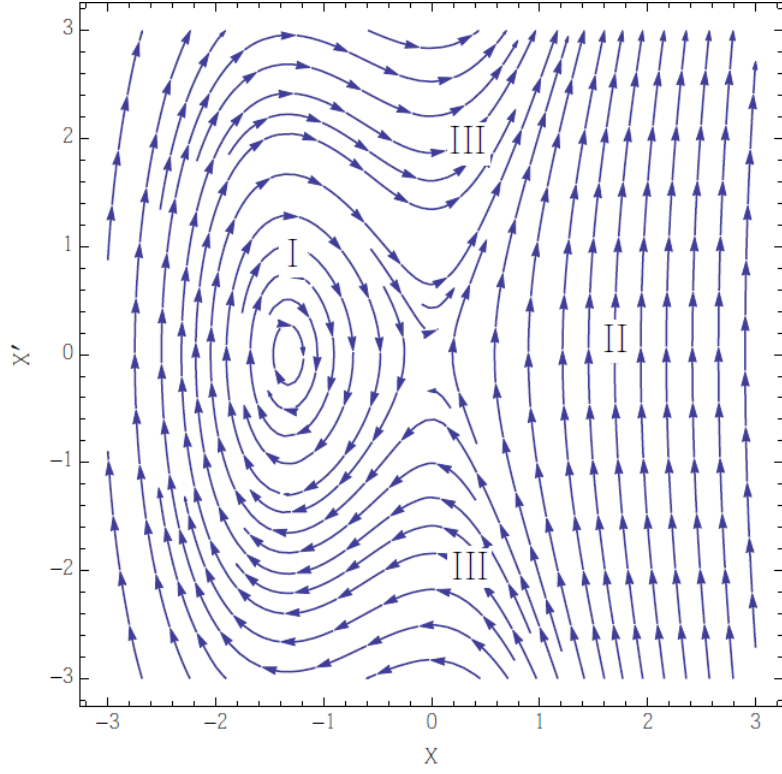


Figura 11: Diagrama de fases para um universo vazio com $k = -1$.

3.3.5. Caso $k = 0$

Para o caso $k = 0$ temos apenas uma raiz real ($\Delta < 0$), e assim Para o caso $k = 0$ temos apenas uma unica raiz real para o polinómio em (3.32) e temos assim de considerar

$$\pm(\tau - \tau_0) = \int \frac{dX}{\sqrt{\frac{3f^2}{4\beta}} \sqrt{\frac{4\beta}{3f^2} X^3 - 1}}, \quad (3.62)$$

que pode ser escrito como

$$\pm(\tau - \tau_0) \left(\frac{3f^2}{4\beta} \right)^{1/6} = \int_{y(\tau_0)}^{y(\tau)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 1}}, \quad (3.63)$$

tendo em conta a definição

$$y(\tau) = \left(\frac{4\beta}{3f^2} \right)^{1/3} X(\tau). \quad (3.64)$$

Se escolhermos $y(\tau_0) = 1 = \left(\frac{4\beta}{3f^2} \right)^{1/3} X(\tau_0)$, então

$$y(\tau) = \frac{(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1) \operatorname{cn} \left(\frac{\tau}{g} \left(\frac{4\beta}{3f^2} \right)^{1/6} \middle| m^2 \right)}{1 + \operatorname{cn} \left(\frac{\tau}{g} \left(\frac{4\beta}{3f^2} \right)^{1/6} \middle| m^2 \right)}, \quad (3.65)$$

onde foi definido

$$g = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \quad m^2 = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}, \quad (3.66)$$

e para $I(\tau)$ resulta,

$$I(\tau) = \frac{2g\sqrt{\frac{\beta}{3}}}{1 - \sqrt{3}} \left[\frac{\tau - \tau_0}{g} \left(\frac{3f^2}{4\beta} \right)^{1/6} - \frac{1}{1 + \delta} \left(\Pi \left(\operatorname{am} \frac{\tau - \tau_0}{g} \left(\frac{3f^2}{4\beta} \right)^{1/6} \middle| \frac{\delta^2}{\delta^2 - 1} \middle| m^2 \right) - \delta f_1 \right) \right], \quad (3.67)$$

com

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}. \quad (3.68)$$

Dado que $\frac{\delta^2}{\delta^2 - 1} < m^4$, temos a forma funcional de f_1 escrita como

$$f_1 = \sqrt{\frac{1 - \delta^2}{m^4 + m'^4 \delta^2}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{m^4 + m'^4 \delta^2}{1 - \delta^2}} \operatorname{xs} \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \left(\frac{3f^2}{4\beta} \right)^{1/6} \right) \right], \quad (3.69)$$

onde $m'^4 \equiv 1 - m^4 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

Por outro lado, se escolhemos $y(\tau_0) = +\infty$, então temos as soluções

$$y(\tau) = \frac{(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{cn} \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \left(\frac{4\beta}{3f^2} \right)^{1/6} \middle| m^2 \right)}{1 - \operatorname{cn} \left(\frac{\tau - \tau_0}{g} \left(\frac{4\beta}{3f^2} \right)^{1/6} \middle| m^2 \right)}, \quad (3.70)$$

e

$$I(\tau) = \frac{2g\sqrt{\frac{\beta}{3}}}{\sqrt{3} - 1} \left[-\frac{\tau - \tau_0}{g} \left(\frac{3f^2}{4\beta} \right)^{1/6} + \frac{1}{1 - \delta} \left(\Pi \left[\operatorname{am} \frac{\tau - \tau_0}{g} \left(\frac{3f^2}{4\beta} \right)^{1/6} \middle| \frac{\delta^2}{\delta^2 - 1} \middle| m^2 \right] - \delta f_1 \right) \right], \quad (3.71)$$

com

$$\delta = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}, \quad (3.72)$$

onde m^2 , g e f_1 são dados da mesma forma que anteriormente.

Olhando para o espaço de fases (figura 12) verificamos que não existem trajectórias fechadas (região I), conforme foi visto no estudo feito aqui. Isto revela que para $k = 0$ desde/para um factor de escala infinito. De particular interesse claro são os casos em que o universo expande desde um factor de escala pequeno ou nulo até ao infinito, da forma (acelerada) indicada pelas soluções obtidas.

Nesta secção foram encontradas soluções exactas para teorias escalares tensoriais de potencial quadrático para o caso de um universo vazio.

Tomando em conta a dualidade vácuo-stiff verificamos que estas soluções são as mesmas para o caso de um universo dominado por matéria stiff. A diferença surge quando voltamos ao referencial de Jordan. Para fazer essa transformação torna-se necessário ter em conta a redefinição do parâmetro de acoplamento ($\omega(\phi)$) apresentada na equação (3.16).

Foi possível ver o modo como certas soluções de X (factor de escala no referencial de Einstein) divergem em tempo (conforme) finito. Dada a definição deste tempo, concluiu-se que podemos ter expansão acelerada. Na figura 2 vê-se

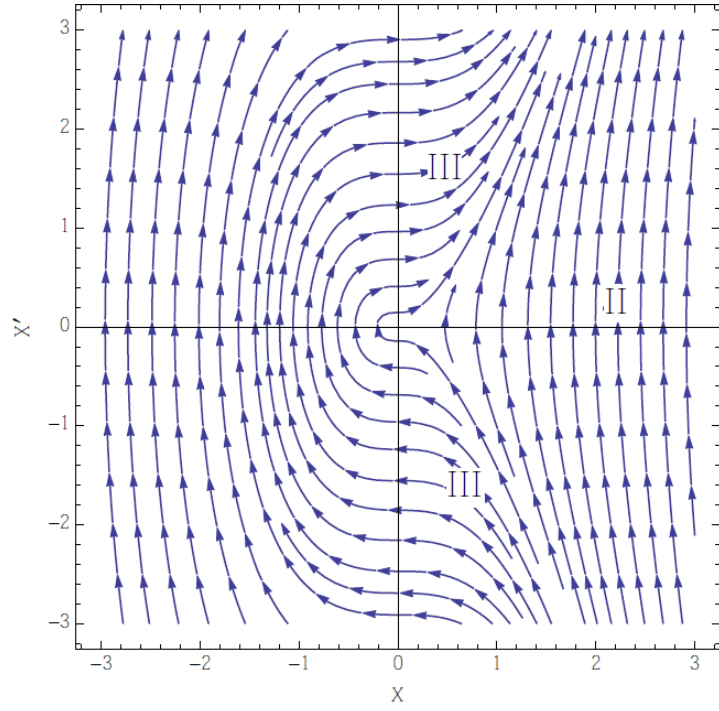


Figura 12: Diagrama de fases para um universo vazio com $k = 0$.

um caso em que temos (com uma escolha apropriada de condições iniciais) o universo a expandir de um factor de escala infinito (e ϕ finito também) até um valor infinito, voltando posteriormente de forma acelerada para o infinito (temos um *bounce*).

Na figura 6 vê-se que a solução obtida para este caso permite (com uma escolha adequada das condições iniciais) um universo a expandir aceleradamente desde $a = 0$.

Nos gráficos apresentados foi possível notar a existência de réplicas. A escolha da réplica vem da escolha do valor inicial do tempo conforme. Tal não faz diferença no referencial de Jordan.

Viu-se que mesmo para o caso de X oscilatório podemos ter um universo em expansão acelerada, desde que ϕ tenda para 0 de forma oscilatória.

Consideramos agora o caso de um universo dominado por radiação. Temos agora um novo parâmetro, que está ligado à densidade de energia (presente) do respectivo fluido.

3.4. Soluções exactas de radiação em Relatividade Geral ($f = 0$)

Considere-se agora o caso de $\gamma = 4/3$ (radiação).
Da equação (3.4) temos

$$\pm (\tau - \tau_0) = \int_{X(\tau_0)}^{X(\tau)} \frac{dX}{\sqrt{X^3 - \frac{3k}{\beta} X^2 + 3M X}}. \quad (3.73)$$

Neste caso temos sempre um zero do polinómio a $X = 0$. Os outros dois zeros são.

$$X_{\pm} = \frac{3k}{2\beta} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9k^2}{\beta^2} - 12\frac{M}{\beta}}. \quad (3.74)$$

Esta é uma tarefa muito semelhante ao caso anterior de vácuo em $f \neq 0$, só que em vez de f temos o parâmetro M a estudar.

Temos dois zeros adicionais se $M > \frac{3k^2}{4\beta}$, um zero se $M = \frac{3k^2}{4\beta}$, e nenhum caso contrário

Para $k = -1$ temos apenas soluções limitadas para $X(\tau)$. Para $k = 0$ temos apenas soluções ilimitadas para $X(\tau)$.

3.5. O caso de radiação com $f \neq 0$

No caso de radiação com $f \neq 0$, a equação (3.4) é

$$(X')^2 + 4k X^2 = f^2 + 4M X + \frac{4}{3} \beta X^3, \quad (3.75)$$

e com a mudança de variável $X = x + \frac{k}{\beta}$ e uma nova definição de τ , $d\eta = \sqrt{\frac{3}{\beta}} d\tau$, a equação anterior fica

$$x' = \pm \sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}. \quad (3.76)$$

onde

$$g_2 \equiv 12 \left[\left(\frac{k}{\beta} \right)^2 - \frac{M}{\beta} \right], \quad (3.77)$$

$$g_3 \equiv 8 \left(\frac{k}{\beta} \right)^3 - 3\beta \left(\frac{f}{\beta} \right)^2 - 12\frac{M}{\beta} \left(\frac{k}{\beta} \right), \quad (3.78)$$

com o discriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Aqui podemos ter soluções limitadas para $k = -1$, mas $k = 0$ só tem soluções ilimitadas.

A equação () define a função elíptica de Weierstrass $\wp(z)$.

Quando temos $X(\tau_0) = +\infty$ derivamos que

$$X(\tau) = \wp(\tau - \tau_0; g_2, g_3) + \frac{k}{\beta}, \quad (3.79)$$

e assim

$$I(\tau) = \sqrt{\frac{3}{\beta}} \frac{f}{\wp'(\xi)} \left[\ln \frac{\sigma(\tau - \tau_0 - \xi)}{\sigma(\tau - \tau_0 + \xi)} + 2(\tau - \tau_0)\zeta(\xi) \right], \quad (3.80)$$

onde σ é função sigma de Weierstrass, ζ é a função zeta de Weierstrass e $\xi \equiv \wp^{-1}(-\frac{k}{\beta})$ (ver apêndice).

A restante solução ilimitada usa $X(\tau_0)$ finito. Por simplicidade aqui usamos $X(\tau_0) = X_0$ ou $X(\tau_0) = \tilde{X}_0$ para $\Delta > 0$ e $\Delta < 0$ respectivamente. Neste caso dividimos o integral na forma $\int_{X_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} - \int_{X(\tau)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \omega - \int_{X(\tau)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$, onde ω é um meio período da função elíptica de Weierstrass.

Ficamos então com

$$X(\tau) = \wp(\tau - \tau_0 \pm \omega) + \frac{k}{\beta}, \quad (3.81)$$

Se $\Delta > 0$ isto pode ser escrito na forma

$$X(\tau) = X_0 + \frac{(X_0 - X_1)(X_0 - X_2)}{\wp(\tau - \tau_0) - X_0} + \frac{k}{\beta}. \quad (3.82)$$

Temos assim

$$I(\tau) = \sqrt{\frac{3}{\beta}} \frac{f}{\wp'(\xi)} \left[\ln \frac{\sigma(\tau - \tau_0 - \xi \pm \omega)}{\sigma(\tau - \tau_0 + \xi \pm \omega)} + 2(\tau - \tau_0 \pm \omega)\zeta(\xi) \right], \quad (3.83)$$

novamente com $\xi \equiv \wp^{-1}\left(-\frac{k}{\beta}\right)$.

Finalmente, quando X é limitado ($X_1 > X(\tau) > X_2$) e $\Delta > 0$ podemos escrever ($X(\tau_0) = X_2$)

$$X(\tau) = \wp(\tau - \tau_0 \pm \omega') + \frac{k}{\beta}, \quad (3.84)$$

e se $\Delta > 0$ podemos escrever na forma

$$X(\tau) = X_2 + \frac{(X_2 - X_0)(X_2 - X_1)}{\wp(\tau - \tau_0) - X_2} + \frac{k}{\beta}, \quad (3.85)$$

com ω' o outro meio período de \wp dado por $\omega' = \int_{X_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$. Temos assim

$$I(\tau) = \sqrt{\frac{3}{\beta}} \frac{f}{\wp'(\xi)} \left[\ln \frac{\sigma(\tau - \tau_0 - \xi \pm \omega')}{\sigma(\tau - \tau_0 + \xi \pm \omega')} + 2(\tau - \tau_0 \pm \omega')\zeta(\xi) \right], \quad (3.86)$$

novamente com $\xi \equiv \wp^{-1}\left(-\frac{k}{\beta}\right)$.

O diagrama de fases encontra-se descrito nas figuras 13, 14 e 15. Este diagrama é bastante similar ao caso de vácuo. Os pontos fixos encontra-se agora em $((1 - \sqrt{1 - M\beta})/\beta, 0)$ (o centro), e em $((1 + \sqrt{1 - M\beta})/\beta, 0)$ a sela por onde passa a separatriz. Esta separatriz, como anteriormente, corresponde a $\Delta = 0$, sendo dada por $f^2 = f_*^2 \equiv 4(1 + \sqrt{1 - M\beta})^{1/2}(1 - 2M\beta + \sqrt{1 - M\beta})/3\beta$.

Como no caso do vácuo, podemos fazer a distinção de 3 regiões.

Região I - Na região I, em torno do centro e com $f < f_*$ as linhas integrais são fechadas, correspondendo a um comportamento periódico. No entanto, tal como no caso de poeira só a parte das linhas integrais onde $f^2 \geq 0$ são admissíveis. As trajectórias mais próximas no centro não satisfazem este requisito. Se nos restringirmos a X positivo então as trajectórias correspondem a soluções que emergem de $X = 0$ São assim universos que expandem e voltam a colapsar. Neste caso de radiação, as trajectórias são determinadas com recurso a mais um parâmetro (a densidade de energia M presente) sendo que as soluções físicas são determinadas pela relação entre M e β . Por exemplo, quando $\beta = \beta_c = 3/(4M)$, $f_* \rightarrow 0$ e assim todas as soluções nesta região têm $f^2 < 0$ e são assim não-físicas.

Região II - Na região II, à direita do ponto de sela, temos soluções contraindo desde X infinito para um valor finito e positivo (e assim um valor finito do factor de escala do universo) ou expandindo desde X finito para valores infinitos.

Região III - As soluções nesta região correspondem aquelas onde $f > f_*$, e expandem de $X = 0$ para infinito, ou colapsam de infinito para $X = 0$. Se permitimos $X < 0$, então esta região corresponde a linhas integrais completas que colapsam de infinito para um valor negativo de X , expandindo de volta para infinito.

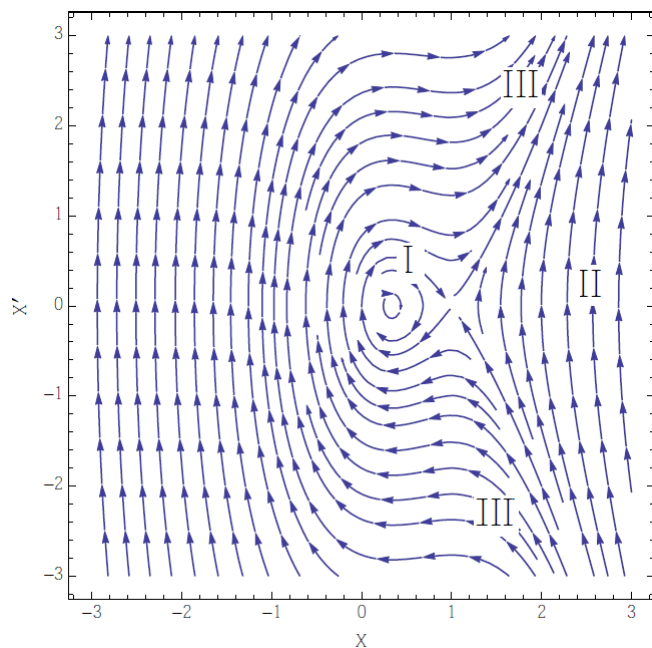


Figura 13: Diagrama de fases para um universo de radiação com $k = 1$.

Poder-se-ia ter usado novamente as função elípticas de Jacobi, mas o conjunto de comportamentos qualitativos (forma das equações) é o mesmo. Temos no entanto mais um parâmetro (M) que leva a que tenhamos mais condições associadas aos diferentes comportamentos qualitativos disponíveis. As funções elípticas de Weierstrass são uma forma mais compacta de escrever as equações. Porém são menos intuitivas que as funções de Jacobi, e o seu comportamento difere muito consoante o valor dos parâmetros g_2 e g_3 .

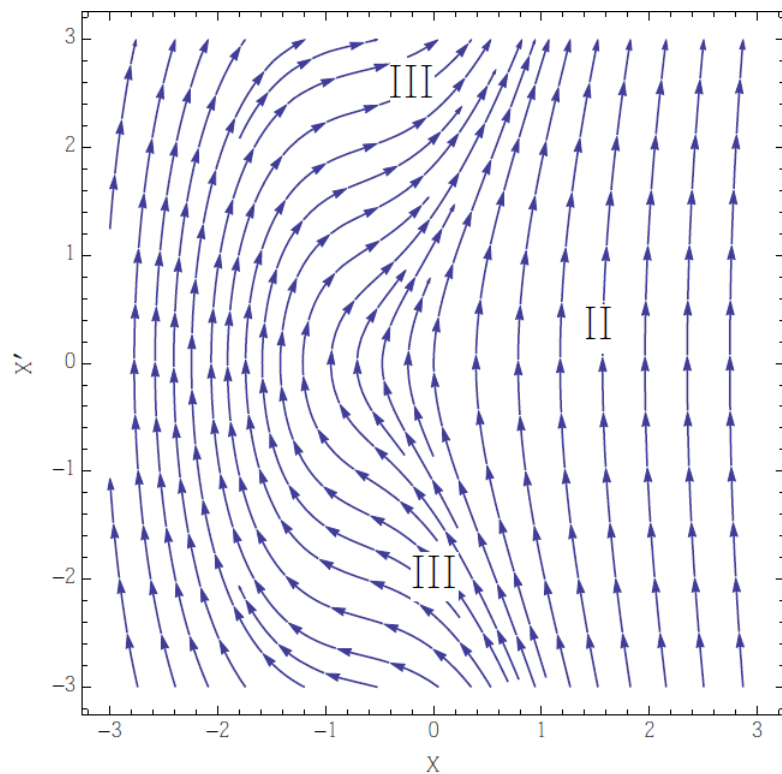


Figura 14: Diagrama de fases para um universo de radiação com $k = -1$.

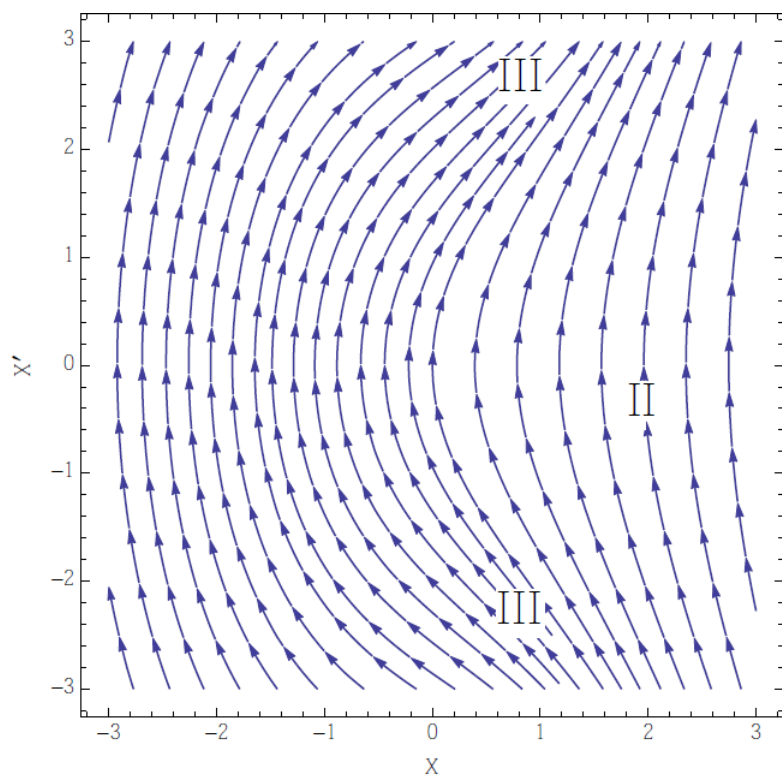


Figura 15: Diagrama de fases para um universo de radiação com $k = 0$.

4. POTENCIAL QUADRÁTICO - CAMPO ESCALAR COMPLEXO

Considero neste (e no próximo) capítulo duas adições interessantes ao modelo de potencial quadrático aqui estudado. De modo a tratar estes casos analiticamente considero o caso mais simples (e natural) de ω constante.

Considero agora que o campo escalar ϕ é complexo. Para isso é útil escrever o nosso Lagrangiano (ver a equação (2.147)) na forma ($\phi_{\text{real}} = \Phi^2$)

$$L = \Phi^2 R - 4\omega \Phi g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - 2U(\Phi) + L_M, \quad (4.1)$$

que generalizamos para um campo escalar complexo, ficando na forma

$$L = |\Phi|^2 R - 4\omega g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu}^* \Phi_{,\nu} - 2U(\Phi) + L_M, \quad (4.2)$$

Fazendo agora a descrição do campo escalar Φ na forma polar

$$\Phi \equiv \sqrt{\phi} e^{i\theta}, \quad (4.3)$$

ficamos com

$$L = \phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 4\omega \phi g^{\mu\nu} \theta_{,\mu} \theta_{,\nu} - 2U(\phi) + L_M. \quad (4.4)$$

Na equação (4.3) assumo que $\phi \geq 0$. Tomarei esta condição neste capítulo e no que se segue, assumindo então que a “constante” gravitacional não muda de sinal.

As equações de campo para o novo Lagrangiano ficam

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi \right) - \frac{1}{\phi} \left(\nabla_\mu \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi \right) + 4\omega \left(\partial_\mu \theta \partial_\nu \theta - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\sigma \theta \partial^\sigma \theta \right) - g_{\mu\nu} \frac{U(\phi)}{\phi}, \quad (4.5)$$

$$\square \phi = \frac{8\pi}{3+2\omega} T + \frac{1}{3+2\omega} \left(\frac{\phi}{2} \frac{dU(\phi)}{d\phi} - U(\phi) \right), \quad (4.6)$$

$$\square \theta = -\frac{\partial_\mu \phi}{\phi} \partial^\mu \theta. \quad (4.7)$$

Vemos portanto que a equação de campo de ϕ é inalterada. Considerando uma métrica FRW ficamos com as equações

$$\left(H + \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} + \frac{2\omega+3}{12} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \frac{2}{3} \omega \dot{\theta}^2 + \frac{U(\phi)}{3\phi}, \quad (4.8)$$

$$\dot{H} = \frac{k}{a^2} + 2H \frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - \frac{16\pi\rho}{3\phi} - \frac{4\pi T}{3\phi} + \frac{4\pi}{3+2\omega} \frac{T}{\phi} - 2\omega \dot{\theta}^2, \quad (4.9)$$

$$-\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (\dot{\phi} a^3) = \frac{8\pi}{3+2\omega} T + \frac{1}{3+2\omega} \left(\frac{\phi}{2} \frac{dU(\phi)}{d\phi} - U(\phi) \right), \quad (4.10)$$

$$-\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (\dot{\theta} a^3) = \dot{\theta} \frac{\dot{\phi}}{\phi}. \quad (4.11)$$

Usamos como anteriormente o tempo conforme η , em que a derivada em relação ao mesmo é denotada por $'$. Definimos também as variáveis [6,27,28]

$$X = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{12}} \frac{\phi'}{\phi} = A \frac{\phi'}{\phi}, \quad (4.12)$$

$$Y = \frac{a'}{a} + \frac{\phi'}{2\phi}, \quad (4.13)$$

$$Z = 2\beta\phi a^2, \quad (4.14)$$

$$Q = \theta'. \quad (4.15)$$

Estas novas variáveis relacionam-se com as do capítulo anterior (a que chamo agora de X_{ant} e Y_{ant}) na forma

$$Z = \frac{X_{\text{ant}}}{2\beta}, \quad X = \frac{1}{2}Y'_{\text{ant}}, \quad Y = \frac{1}{2}\frac{X'_{\text{ant}}}{X_{\text{ant}}}. \quad (4.16)$$

Usando então as equações (4.8)-(4.11) com a equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ para a matéria e considerando $U(\phi) = \beta\phi^2$, é possível chegar ao sistema dinâmico

$$X' = -2XY + \frac{(1 - 3\gamma/4)}{A} \left[Y^2 + k - X^2 - \frac{Z}{6} - (4A^2 - 1)Q^2 \right], \quad (4.17)$$

$$Y' = (1 - 3\gamma/2)(Y^2 + k - X^2) - 2X^2 + \gamma\frac{Z}{4} - (4A^2 - 1)Q^2 \left[1 - \frac{1}{2}(3\gamma - 4) \right], \quad (4.18)$$

$$Z' = 2ZY, \quad (4.19)$$

$$Q' = -2QY. \quad (4.20)$$

Para além deste sistema temos o constrangimento

$$Y^2 + k = X^2 + \frac{8\pi\rho a^2}{3\phi} + \frac{Z}{6} + (4A^2 - 1)Q^2. \quad (4.21)$$

A condição $\phi \geq 0$ implica que devemos ter $Z \geq 0$.

Usando as equações (4.19) e (4.20) verificamos que

$$\frac{Z'}{Z} = -\frac{Q'}{Q} \Rightarrow Q = \frac{D}{Z} \quad (4.22)$$

onde D é uma constante. Vemos então que $D = 0 \rightarrow Q = 0$, e então o campo escalar tem uma fase constante, ou seja, pode ser tratado como um campo escalar real. O mesmo acontece no limite $Z \rightarrow +\infty$.

Dada a definição da variável Y verificamos que para um universo em expansão temos $Y > X/2A$.

Discuto agora o sistema dinâmico anterior procurando os pontos de equilíbrio e a sua estabilidade. Tais pontos de equilíbrio podem encontrar-se no infinito, na medida em que pelo menos uma das variáveis do sistema dinâmico seja infinita. Os pontos de equilíbrio onde $Y > X/2A$ são pontos em que o universo expande de modo acelerado.

Mais especificamente, dados X , Y e Q constantes temos que

$$\phi = \phi_0 e^{X\eta}, \quad a = a_0 e^{(Y-X/2A)\eta}, \quad \theta = \theta_0 + Q\eta, \quad Q^2 = \frac{D^2}{4\beta^2} \phi^{-2} a^{-4}, \quad (4.23)$$

4.1. Radiação e vácuo

Para o caso de radiação o sistema dinâmico fica (recorde-se que Q é sempre dado por (4.22))

$$X' = 2XY, \quad (4.24)$$

$$Y' = -(Y^2 + k + X^2) + \frac{Z}{3} - (4A^2 - 1)Q^2, \quad (4.25)$$

$$Z' = 2ZY. \quad (4.26)$$

Temos também que, com $\rho = \rho_0 a^{-4}$, a equação (4.21) fica

$$Y^2 + k = \frac{8\pi\rho_0}{3\phi a^2} + X^2 + \frac{Z}{6} + (4A^2 - 1)Q^2 = \frac{B}{Z} + X^2 + \frac{Z}{6} + (4A^2 - 1)\frac{D^2}{Z^2}, \quad (4.27)$$

onde $B = 16\pi\rho_0\beta/3$.

Como é obvio, o caso de vácuo será dado pela condição $B = 0$.

Usando as equações (4.24) e (4.26) chegamos a

$$\frac{Z'}{Z} = -\frac{X'}{X} \Rightarrow X = \frac{C}{Z}, \quad (4.28)$$

onde C é uma constante, o que nos permite ver que quando $C = 0$ ou $Z \rightarrow +\infty$ então $X = 0$, e assim o campo escalar ϕ fica uma constante ϕ_0 .

Usando agora esta equação em (4.27) para substituir X , ficamos com

$$Y^2 = \frac{Z}{6} - k + \frac{B}{Z} + \frac{\tilde{C}}{Z^2}. \quad (4.29)$$

onde $\tilde{C} = C^2 + (4A^2 - 1)D^2$. Verifica-se então que quando $D^2(4A^2 - 1) < -C^2$ (possível apenas quando $A < 1/2$) ficamos com $\tilde{C} < 0$.

Temos portanto todas as nossas variáveis escritas em termos de Z . Torna-se então importante usar a equação dinâmica :

$$\frac{Z'^2}{4} = \frac{Z^3}{6} - kZ^2 + BZ + \tilde{C} \quad (4.30)$$

Vemos portanto que para este caso de radiação o estudo é feito da mesma forma que em [6] porém considerando que o termo independente em (4.2) (\tilde{C}) pode ser negativo (apenas se $A < 1/2$) e assim existe um valor mínimo positivo para Z . Isto revela que para o caso de um campo escalar de módulo constante, $C = 0$, em que o acoplamento não mínimo à curvatura é inexistente ($\phi^{-1} = G = G_{\text{Rel. Geral}} = \text{constante}$), como se pode ver pelo Lagrangiano (4.4), ficamos com um caso equivalente a um campo escalar (minimamente acoplado à curvatura) sem massa num universo vazio ou preenchido com radiação, e com uma constante cosmológica dada pelo valor do potencial $U(G)$. No entanto o caso do campo escalar real na presença de radiação tem soluções exactas, que foram dadas no capítulo anterior. Assim, as soluções exactas dadas anteriormente são aplicáveis para um universo com um campo escalar sem massa, radiação e constante cosmológica.

Apresento no entanto a análise dos pontos de equilíbrio do sistema (ver [6]). Os pontos de equilíbrio do sistema correspondem então aos zeros do polinómio (4.2).

Este polinómio tem sempre uma raiz, Z_2 , não positiva quando $C^2 \geq (1 - 4A^2)D^2$, e não negativa quando $C^2 \leq (1 - 4A^2)D^2$. Terá outras duas raízes positivas Z_1 e Z_0 ($Z_0 > Z_1$) se o discriminante do polinómio for positivo. Este discriminante é dado por

$$\Delta = -B^3 + 3B^2k^2 - 18kB\tilde{C} - 9\tilde{C}^2 + 48k^3\tilde{C} \quad (4.31)$$

O discriminante é nulo para

$$\tilde{C} = \tilde{C}_0 \equiv \frac{8}{3}k^3 - kB + \frac{1}{3}(4k^2 - B)^{3/2}, \quad (4.32)$$

sendo que para $\tilde{C} < \tilde{C}_0$ o discriminante é positivo e temos então duas raízes (positivas) adicionais. Como para $Z_1 > Z > Z_0$ temos $Z'^2 < 0$, vemos que o intervalo (Z_1, Z_0) é proibido para o sistema em estudo.

- Para $k = 1$, \tilde{C} existe para $B < 3$. Logo se $B > 3$ o discriminante é negativo para qualquer \tilde{C} .
- Para $k = -1$, \tilde{C} existe para $B < 4$. Logo se $B > 4$ o discriminante é negativo para qualquer \tilde{C} .
- Por fim, para $k = 0$, \tilde{C} existe apenas para $B = 0$ (vácuo), sendo que nesse caso temos $\tilde{C} = 0$. Sendo assim, para um universo plano, só no vazio é que temos uma (e apenas uma) raiz (positiva) adicional. Se considerarmos um campo complexo ($D \neq 0$) então temos $X \neq 0$ neste caso.

Para o caso $\tilde{C} = \tilde{C}_0$ temos $\Delta = 0$ e temos $Z_1 = Z_0$. Temos então que Z varia desde zero a infinito. No entanto o universo encontra-se em $(0, Z_0)$ (ou (Z_2, Z_0) se $A < 1/2$) ou em $(Z_0, +\infty)$, não podendo passar do ponto $Z_0 = Z_1$.

Para o caso $\tilde{C} > \tilde{C}_0$ temos $\Delta < 0$ e assim não temos nenhuma raiz positiva, pelo que o universo pode atravessar qualquer valor de $Z > 0$.

Se $C^2 > (1 - 4A^2)D^2$ e Z se encontra no intervalo $(0, Z_1)$ então,

$$|X| > \frac{|C|}{Z_1}. \quad (4.33)$$

Se $C^2 < (1 - 4A^2)D^2$ evemos ter também $Z > Z_2$, e assim

$$\frac{|C|}{Z_2} > |X| > \frac{|C|}{Z_1}, \quad Y^2 \leq Y^2(Z_2). \quad (4.34)$$

Por outro lado, se $Z > Z_0$ temos

$$|X| < \frac{|C|}{Z_1}. \quad (4.35)$$

As raízes são dadas por

$$Z_n = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{-\frac{3}{p}} \right) - \frac{2\pi}{3} n \right] + 2k, \quad (4.36)$$

com $n = 0, 1, 2$ e

$$p = 6B - 12k^2, \quad q = -16k^3 + 12kB + 6\tilde{C}. \quad (4.37)$$

Olhando para a equação (4.2) vemos que temos dois ramos : o ramo $Z' > 0$ e o ramo $Z' < 0$. Para o ramo $Z' > 0$ o ponto de equilíbrio em $Z = Z_1$ é estável e instável para o ramo $Z' < 0$. Relativamente ao ponto $Z = Z_0$, este é estável para o ramo $Z' < 0$ e instável para o ramo $Z' > 0$. Se $C^2 < (1 - 4A^2)D^2$ temos que Z_2 é instável (recorde-se que devemos ter $Z > Z_2$).

Olhando novamente para a equação (4.2) temos que para o caso de apenas uma raiz positiva, esta mesma raiz corresponde a um ponto de equilíbrio instável (uma sela). Note-se que os ramos $Z' > 0$ e $Z' < 0$ correspondem a $Y > 0$ e $Y < 0$ respectivamente.

Considere-se agora a análise de pontos de equilíbrio no infinito. Considere-se $Z \rightarrow +\infty$. Neste caso $X \rightarrow 0$ e $Y \rightarrow \pm\infty$. Tal corresponde a um universo em expansão acelerada. Temos

$$Z' = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{sgn}(Y) Z^{3/2}, \quad (4.38)$$

onde $\text{sgn}(Y)$ é o sinal de Y . Vemos então que este ponto é um atrator se $Y > 0$ e repulsor caso contrário. Este ponto corresponde a um universo de de Sitter para $Y > 0$.

Se agora se considerar $Z \rightarrow 0$ (possível apenas se $C^2 > (1 - 4A^2)D^2$) temos $X \rightarrow \pm\infty$ e Y . Este comportamento é dado por

$$X = \text{sgn}(X) \frac{|C|}{Z}, \quad Y = \text{sgn}(Y) \frac{|\tilde{C}|}{Z}. \quad (4.39)$$

Temos pela equação (4.24)

$$X' = -2XY \propto -2X^2 \text{sgn}(YX). \quad (4.40)$$

Suponhamos $X > 0$. Se tivermos $Y > 0$ então X tende a decrescer (afastar-se de $+\infty$) e Y também - o ponto é instável. Se tivermos $Y < 0$ então X tende a crescer para $+\infty$ e Y tende para $-\infty$ - o ponto é estável.

Suponhamos agora $X < 0$. Se tivermos $Y > 0$ então X tende a crescer (afastar-se de $-\infty$) e Y tende a decrescer - o ponto é instável. Se tivermos $Y < 0$ então X tende a decrescer (para $-\infty$) e Y tende para $-\infty$ - o ponto é estável. Vemos assim que o ponto é instável para $Y > 0$ e estável para $Y < 0$.

De modo a ter expansão ($Y > X/2A$) deve ser satisfeita a condição (sem nenhuma perda de generalidade vamos dizer que $\tilde{C} > 0$ e $C > 0$)

$$\tilde{C} > \frac{C}{2A} \quad (4.41)$$

se $X > 0$ e $Y > 0$. Por outro lado se $X < 0$ e $Y < 0$ devemos ter

$$\tilde{C} < \frac{C}{2A}. \quad (4.42)$$

Para (4.41) temos $A > 1/2$ e para (4.42) temos $A < 1/2$. Verificamos que estas condições são independentes de D , e assim estes resultados são idênticos aos obtidos para um campo escalar real [6].

Esta condição é trivialmente satisfeita quando $X < 0$ e $Y > 0$, e trivialmente nunca satisfeita se $X > 0$ e $Y < 0$.

Esta análise revela que para radiação e vácuo existe pouca diferença entre um campo escalar real e complexo. Considere-se agora o caso de poeira ($\gamma = 1$).

4.2. Poeira

Para poeira temos o sistema dinâmico

$$X' = -2XY + \frac{1}{4A} \left(Y^2 + k - X^2 - \frac{Z}{6} - (4A^2 - 1)Q^2 \right), \quad (4.43)$$

$$Y' = -\frac{1}{2}(Y^2 + k) - \frac{3}{2}X^2 + \frac{Z}{4} - \frac{3}{2}(4A^2 - 1)Q^2, \quad (4.44)$$

$$Q' = -2QY, \quad (4.45)$$

$$Z' = 2ZY. \quad (4.46)$$

com

$$Y^2 + k = X^2 + \frac{8\pi\rho_0}{3a\phi} + \frac{Z}{6} + (4A^2 - 1)Q^2. \quad (4.47)$$

i) Temos trivialmente o ponto de equilíbrio

$$X_c = Y_c = Z_c = Q_c = 0, \quad (4.48)$$

para $k = D = 0$. Introduzindo isto na equação (4.47) vemos que devemos ter $\rho_0 = 0$, ou seja, este ponto só existe no caso de vácuo (já estudado). E como foi visto anteriormente (equação (4.2)), este ponto corresponde a uma sela.

ii) Temos também, para $k = 1$ o conjunto de pontos

$$Y_c = 0, \quad Z_c = 4, \quad X_c^2 = \frac{1}{3} - (4A^2 - 1)Q_c^2. \quad (4.49)$$

Por análise de estabilidade linear mostra-se que estes pontos são selas para quaisquer A ou Q_c^2 (e para X positivo ou negativo), e exigem

$$Q_c^2 \leq \frac{1}{3(4A^2 - 1)}. \quad (4.50)$$

Este ponto também existe apenas no limite de vácuo.

iii) Temos por fim, para $k = -1$ o ponto

$$X_c = Q_c = Z_c = 0, \quad Y_c = \pm 1, \quad (4.51)$$

que por análise de estabilidade linear vê-se que é uma sela (para $Y_c = 1$ ou $Y_c = -1$).

Novamente, este ponto existe apenas no limite de vácuo.

Estes pontos são apresentados na tabela seguinte. Os mesmos pontos ocorrem nos próximos casos de constante cosmológica e “stiff” sendo novamente válidos apenas para vácuo, por isso esta tabela será omitida nesses casos.

Ponto de Equilíbrio	Existência	Estabilidade
$X = Y = Q = Z = 0$	$k = D = 0$	Sela
$X = Q = Z = 0$ e $Y = 1$	$k = -1$ e $D = 0$	Sela
$X = Q = Z = 0$ e $Y = -1$	$k = -1$ e $D = 0$	Sela
$Y = 0, Z = 4$ e $X = \sqrt{\frac{1}{3} - (4A^2 - 1)Q^2}$	$k=1$	Sela
$Y = 0, Z = 4$ e $X = -\sqrt{\frac{1}{3} - (4A^2 - 1)Q^2}$	$k = 1$	Sela

Tabela I: Pontos de equilíbrio (válidos apenas no limite de vácuo).

A análise destas variáveis quando estas tendem a valores muito grandes ($\pm\infty$) é simples quando nos encontramos no caso de vácuo ou radiação. Mas nos restante casos não podemos escrever a dependência de X e Y em Z .

- Interessa-nos em particular o “ponto” de de Sitter/anti-de Sitter onde temos $|Y|$ e Z grandes (a tender para ∞), e $|X|$ e $|Q|$ pequenos (a tender para 0). Quando o sistema se encontra nesta condições, a grande velocidade de expansão ($Y > 0$ e $X = 0$ garante expansão) garante que temos um factor de escala a crescer rapidamente, e assim a densidade de energia da poeira decresce rapidamente. Assim nestas condições as soluções obtidas anteriormente para vácuo a grande Z ($Y^2 \approx Z/6$ e $X^2 = C^2/Z^2$) são uma boa aproximação para o sistema nestas condições. A equação (4.46) mostra que Z cresce sempre apenas se $Y > 0$. Podemos também olhar para a equação (dado que tendemos para vácuo) para ver que $Z = +\infty$ é estável quando considermos $Z' > 0$ (o que por (4.46) implica $Y > 0$). Como se viu no caso de vácuo, este ponto é um atrator para o caso $Y > 0$ E é de facto apenas $Y > 0$ que nos interessa pois como referido permite a expansão do universo ($X = 0$ neste ponto). Assim, dado que $Y \rightarrow +\infty$ temos que a velocidade de expansão ($X = 0$ implica $Y = \frac{da}{dt}$) cresce sempre, e temos assim um universo acelerado.

Olhando para a equação de X' vemos que se $A < 1/2$ a fase do campo escalar tem um contributo positivo para X' enquanto que se $A > 1/2$ o contributo é negativo. Assim, no caso $A < 1/2$ esta fase $Q^2 = D^2/Z^2$ tende a facilitar a aproximação X a 0 se $X < 0$ e vice-versa (para $A > 1/2$).

Do mesmo modo, olhando para a equação de Y' vê-se que para $A < 1/2$ a fase do campo escalar tem um contributo positivo para X' enquanto que se $A > 1/2$ o contributo é negativo. Assim, olhando para $Y > 0$ vê-se que $A < 1/2$ facilita o crescimento de Y para $+\infty$.

Naturalmente este contributo de Q^2 é cada vez menor á medida que nos aproximamos do “ponto” de de Sitter. No entanto, o valor das constantes A e D têm impacto no “poder” atrator deste “ponto”, na medida em que pode aumentar ou diminuir o numero de trajectórias que para ele tendem.

- No caso de radiação e vácuo também se considerou o “ponto” dado por $|X|$, $|Y|$ e $|Q|$ grandes e $Z = 0$. Olhando para a equação de Z vê-se que, para estabilidade, devemos ter $Y < 0$. Para termos expansão devemos ter $X < 0$ tal que $Y - X/(2A) > 0$. No entanto se a função $(Y - X/(2A))'$ for negativa, o universo tenderá a desacelerar muito rapidamente e assim devemos ter $(|X|, |Y|$ e $|Q|$ grandes e Z pequeno)

$$Y' - \frac{1}{2A}X' > 0 \Rightarrow 2\frac{XY}{A} - \frac{1}{4A}(Y^2 - X^2 - (4A^2 - 1)Q^2) > Y^2 + 3X^2 + 3(4A^2 - 1)Q^2. \quad (4.52)$$

“Colocando” o sistema nestas condições temos o sistema a aproximar-se rapidamente do estado de vácuo (mesmo raciocínio que acima) e assim temos $Y^2 \propto X^2 \propto 1/Z^2$. A equação para Z' mostra que Z decresce sem parar para $Y < 0$, e assim temos $Y \rightarrow -\infty$ e $X \rightarrow -\infty$, com a mesma dependência em Z que no caso de vácuo (onde se viu aliás, que este “ponto” é estável). As equações para X' e Y' mostram que para $A > 1/2$ estes limites ($X \rightarrow -\infty$ e $Y \rightarrow -\infty$) são individualmente “fortalecidos” pela existência da fase variável do campo escalar ($Q^2 = D^2/Z^2$, com $D \neq 0$). Note-se no entanto que para a condição (4.52) temos que a fase tem um contributo positivo apenas para um conjunto muito pequeno de valores de A^2 próximos de $1/6$. Fora desse pequeno intervalo, Q^2 dificulta a aceleração do universo.

4.3. Constante cosmológica

Considero agora o caso da matéria como uma constante cosmológica, ou falso vácuo ($\gamma = 0$). Temos então o sistema dinâmico

$$X' = -2XY + \frac{1}{A}\left(Y^2 + k - X^2 - \frac{Z}{6} - (4A^2 - 1)Q^2\right), \quad (4.53)$$

$$Y' = Y^2 + k - 3X^2 - 3(4A^2 - 1)Q^2, \quad (4.54)$$

$$Q' = -2QY, \quad (4.55)$$

$$Z' = 2ZY. \quad (4.56)$$

Temos também a condição (4.21) que agora é

$$Y^2 + k = X^2 + \frac{8\pi\rho_0 a^2}{3\phi} + \frac{Z}{6} + (4A^2 - 1)Q^2. \quad (4.57)$$

Novamente começamos por analisar os pontos de equilíbrio para valores finitos ou nulos das variáveis.

i) Temos para $k = -1$, $D = 0$ e $A < 1/\sqrt{3}$

$$Y_c = \pm\sqrt{\frac{1}{1 - 3A^2}}, \quad X_c = AY_c, \quad Q_c = Z_c = 0. \quad (4.58)$$

Para análise de estabilidade linear mostra-se que este ponto é uma sela se $1/2 < A < 1/\sqrt{3}$. No caso de ser uma espiral, é estável para $Y > 0$ e instável para $Y < 0$.

Introduzindo isto na equação (4.57) ficamos com uma condição mais forte para A , nomeadamente $A > 1/3$

ii) Temos para $k = 1$, $D = 0$ e $A > 1/\sqrt{3}$

$$Y_c = \pm\sqrt{\frac{1}{3A^2 - 1}}, \quad X_c = AY_c, \quad Q_c = Z_c = 0. \quad (4.59)$$

que é uma sela para qualquer valor de $A > 1/\sqrt{3}$.

No que toca ao comportamento de de Sitter neste caso, devemos notar que a equação de ϕ escreve-se neste caso

$$\square\phi \propto -\Lambda, \quad (4.60)$$

onde Λ é a constante cosmológica. Esta equação mostra que a estabilização de ϕ não é possível dada a existência de uma fonte constante. Assim, não podemos atingir o ponto de de Sitter pois $X \rightarrow 0$ não é possível com uma constante cosmológica presente. Tal foi já relatado em [6].

Como se vê pelas equações de X' e Y' , a fase do campo escalar tende a facilitar a divergência de X e Y para valores negativos se $A > 1/2$, e facilitar a divergência de X e Y para valores positivos se $A < 1/2$.

Analizando $Y' - X'/2A$ como em poeira verificamos que dinâmica da fase (Q^2) tende a contrariar a aceleração do universo, a não ser para o pequeno intervalo $1/4 > A^2 > 1/6$. Fora deste intervalo, a presença de uma fase variável diminui o poder atrator do “ponto” no infinito $|X|, |Y| \rightarrow \infty$.

4.4. Stiff

Por fim, considerando $\gamma = 2$ ficamos com o sistema dinâmico

$$X' = -2XY - \frac{1}{2A} \left[Y^2 + k - X^2 - \frac{Z}{6} - (4A^2 - 1)Q^2 \right], \quad (4.61)$$

$$Y' = -2(Y^2 + k) + \frac{Z}{2}, \quad (4.62)$$

$$Z' = 2ZY, \quad (4.63)$$

$$Q' = -2QY. \quad (4.64)$$

Temos também a condição (4.21) que agora é

$$Y^2 + k = X^2 + \frac{8\pi\rho_0}{3a^4\phi} + \frac{Z}{6} + (4A^2 - 1)Q^2. \quad (4.65)$$

Novamente, como no caso de poeira, não temos pontos de equilíbrio para valores finitos ou nulos das nossas variáveis. Passamos já para a análise dos “pontos” no infinito.

- Em relação ao “ponto” de de Sitter temos uma análise similar ao caso de poeira. Neste caso aproximamo-nos muito mais rápido do vácuo pois temos $\rho_{\text{stiff}} \propto a^{-6}$. “Colocando” o universo em condições de expansão e não desaceleração a Y razoavelmente grande teremos claramente o universo a tender (muito mais rápido que em poeira ou radiação) para o estado de vácuo já estudado e assim vemos claramente a aproximação ao “ponto” atrator de de Sitter ($Y^2 \propto Z$).

Como é claro, a equação de Y' não depende de Q . No que diz respeito a X' , a fase variável tende a ajudar à atracção de X para 0 se $A < 1/2$ caso $X > 0$, e se $A > 1/2$ se $X < 0$. Claro que à medida que $Q \rightarrow 0$ este contributo tende a desvanecer.

- Para $|X|, |Y|, |Q|$ grandes e Z pequeno também se aplica a discussão apresentada para poeira. A variável Q^2 neste caso não surge na equação de Y' pelo que não tem influência na divergência de Y para $\pm\infty$. Em relação a X' a fase do campo tende a facilitar a divergência

Olhando por fim para $(Y - X/(2A))'$ verificamos que a fase do campo dá um contributo positivo para a aceleração do universo se $A < 1/2$ enquanto que para $A > 1/2$ tende a dificultá-la.

5. POTENCIAL QUADRÁTICO - INTERAÇÃO COM A MATÉRIA

Consideramos novamente a teoria de Brans-Dicke com potencial quadrático. Consideramos agora no entanto um acoplamento entre o campo escalar ϕ e a matéria. Em [16] foi considerado o estudo de um campo escalar minimamente acoplado à curvatura e acoplado à matéria. Aqui vejo as consequências de ter igualmente um acoplamento não mínimo à curvatura.

Começamos por considerar que na densidade Lagrangiana de matéria, a métrica encontra-se acoplada ao campo escalar. Ficamos com

$$\mathcal{L}_M[g_{\mu\nu}, \psi] \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_M[\tilde{g}_{\mu\nu}, \psi] \quad (5.1)$$

onde ψ são os campos de matéria, e onde assumimos que $\tilde{g}_{\mu\nu} = \phi^\alpha g_{\mu\nu}$.

Aplicamos então a variação da acção em termos de ϕ :

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} \delta \phi = \delta \phi \left[R - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{2\omega}{\phi} \square \phi + \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{\sqrt{-g}} \left(\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{L}_M)}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} \right) \frac{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}}{\delta \phi} \right] = 0. \quad (5.2)$$

Como normalmente, R é tirado do traço da equação de campo da métrica, cuja forma é inalterada pelo acoplamento,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi \right) - \frac{1}{\phi} \left(\nabla_\mu \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi \right) - g_{\mu\nu} \frac{U(\phi)}{\phi}. \quad (5.3)$$

Assim, (5.2) fica

$$\square \phi = \frac{8\pi}{3+2\omega} (1-\alpha) T + \frac{1}{3+2\omega} \left(\frac{\phi}{2} \frac{dU(\phi)}{d\phi} - U(\phi) \right), \quad (5.4)$$

onde se usou

$$\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{L}_M)}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \tilde{T}^{\mu\nu}. \quad (5.5)$$

Calculando a divergência da equação (5.3) ficamos com

$$\nabla_\mu T_\phi^{\mu\nu} - \frac{\nabla_\mu \phi}{\phi^2} T^{\mu\nu} = - \frac{\nabla_\mu T^{\mu\nu}}{\phi}. \quad (5.6)$$

Usando a forma de $T_\phi^{\mu\nu}$ (2.61) e (5.4) ficamos com a equação de conservação

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\alpha}{2} T \frac{\nabla^\nu \phi}{\phi}. \quad (5.7)$$

e assim para um fluido perfeito

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = - \frac{\alpha}{2} T \frac{\dot{\phi}}{\phi}. \quad (5.8)$$

Esta última equação permite-nos escrever a expressão para a densidade de energia como

$$\rho = \rho_0 a^{-3\gamma} \phi^{(\alpha/2)(4-3\gamma)}. \quad (5.9)$$

Como é possível ver por (5.8), apenas no caso de radiação o acoplamento é nulo pois o campo acopla ao traço do tensor energia-momento.

Aplicando a uma métrica FRW ficamos com as equações

$$\left(H + \frac{\dot{\phi}}{2\phi}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} + \frac{2\omega + 3}{12} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{U(\phi)}{3\phi}, \quad (5.10)$$

$$\dot{H} = \frac{k}{a^2} + 2H\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{16\pi\rho}{3\phi} - \frac{4\pi T}{3\phi} + \frac{4\pi}{3+2\omega}(1-\alpha)\frac{T}{\phi}, \quad (5.11)$$

$$-\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\dot{\phi}a^3) = \frac{8\pi}{3+2\omega}(1-\alpha)T + \frac{1}{3+2\omega} \left(\frac{\phi}{2} \frac{dU(\phi)}{d\phi} - U(\phi)\right), \quad (5.12)$$

Da mesma maneira que foi feito na secção anterior, escrevemos o sistema dinâmico a partir das variáveis (4.12), (4.13) e (4.14) para um potencial quadrático $U(\phi) = \beta\phi^2$. Chegamos ao sistema dinâmico

$$X' = -2XY + \frac{(1-3\gamma/4)(1-\alpha)}{A} \left[Y^2 + k - X^2 - \frac{Z}{6} \right], \quad (5.13)$$

$$Y' = (1-3\gamma/2)(Y^2 + k - X^2) - 2X^2 + \gamma\frac{Z}{4}, \quad (5.14)$$

$$Z' = 2ZY, \quad (5.15)$$

Olhando para o sistema dinâmico, em particular para a equação (5.13), com a redifinição

$$A \rightarrow A' = \frac{A}{1-\alpha}, \quad (5.16)$$

verificamos que a existência de acoplamento reduz-se a uma mera redifinição da constante A , e assim de ω . Isto claro, apenas para o sistema dinâmico com as variáveis usadas. Se X for a solução do sistema com as constantes α e ω , esta solução é a mesma considerando no sistema $\alpha = 0$ e $\omega \rightarrow \omega'$:

$$X_{\alpha,\omega} = X_{\alpha=0,\omega'} \equiv X_{\omega'}, \quad (5.17)$$

e trivialmente o mesmo para Y e Z .

Voltando às coordenadas (a, ϕ) , temos que

$$\phi_{\alpha,\omega} \propto \phi_{\omega'}^{1/(1-\alpha)}. \quad (5.18)$$

Usando a equação de Y e a relação (5.17) aplicada a Y chegamos a

$$a_{\alpha,\omega} = c_1 a_{\omega'} + c_2 \phi_{\omega'}^{\frac{1}{2} \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \right)}, \quad (5.19)$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

No entanto a redifinição $A \rightarrow A'$ não é possível no caso $\alpha = 1$. Neste caso temos uma teoria fundamentalmente diferente que passo agora a descrever para os casos interessantes, começando pelo caso de poeira.

5.1. Poeira em $\alpha = 1$

Neste caso temos que

$$\rho \propto a^{-3} \phi^{1/2}. \quad (5.20)$$

Assim temos que a equação

$$Y^2 + k = X^2 + \frac{8\pi\rho a^2}{3\phi} + \frac{Z}{6}, \quad (5.21)$$

fica ($Z = 2\beta a^2 \phi$)

$$Y^2 + k = X^2 + \frac{B}{\sqrt{Z}} + \frac{Z}{6}, \quad (5.22)$$

onde $B = 8\pi\rho_0\sqrt{2\beta}/3$.

Como já foi visto, neste caso de $\alpha = 1$, a equação para X é sempre $X' = -2XY$. Como já foi visto no capítulo anterior, isto implica que $X = C/Z$. Usando isto em (5.22) ficamos com

$$Y^2 = \frac{Z}{6} - k + \frac{B}{\sqrt{Z}} + \frac{C^2}{Z^2}. \quad (5.23)$$

Usando isto juntamente com a equação diferencial para Z ficamos com

$$W^2 \equiv Z'^2/4 = Y^2 Z^2 = \frac{Z^3}{6} - kZ^2 + BZ^{3/2} + C^2. \quad (5.24)$$

Portanto para encontrar os pontos de equilíbrio é necessário estudar a equação $W = 0$. Esta equação pode ser resolvida a partir de uma equação sêxtica, que se resolve com recurso a funções hipergeométricas. Irei-me referir às soluções desta equação sem as explicitar numericamente, dada a grande complexidade do método de solução.

Ficamos assim com a condição

$$Y^2 + k - X^2 = \frac{Z}{6} + \frac{B}{\sqrt{Z}} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{B^2}{3}}. \quad (5.25)$$

Isto mostra que se $X \rightarrow \pm\infty$ então $Y \rightarrow \pm\infty$. Esta equação mostra também que para $k = 0$ ou $k = -1$ temos sempre $Y \geq Y_m > 0$ se $B > 0$. Para $Z > 0$ isto implica $W^2 \neq 0$. Veja-se que para $Z = 0$ temos $X^2 \rightarrow +\infty$ e $Y^2 \rightarrow +\infty$. Sendo assim não temos pontos de equilíbrio, para $B > 0$, em valores finitos de X , Y e Z .

Para $k = 1$ temos $Y = 0$ em $Z = Z_1$ ou $Z = Z_2$ ($Z_1 > Z_2$ sem perda de generalidade). Estes valores de Z corresponderão também a zeros de W (equação (5.24)). Sendo assim, para $Z_1 > Z > Z_2$ temos $W^2 < 0$ e assim a região (Z_1, Z_2) é proibida. Estes zeros existem se $B < B_m(C)$, onde $B_m(C)$ é calculado a partir da equação $Y^2 = 0$. É possível verificar que para $C > 16/3$ não existe $B < B_m(C)$ dado que $B_m(C > 16/3) < 0$.

Se $C = 0$ então temos o ponto de equilíbrio $Z = 0$, que é estável para $Y < 0$ e instável para $Y > 0$.

Para o caso $B = 0$ temos $Y^2 + k \geq X^2$. Neste caso, $k = 0$ permite qualquer valor de Y , enquanto $k = -1$ continua a exigir um valor mínimo para Y^2 . Como é obvio neste caso, o acoplamento não faz diferença pois não existe matéria para acoplar ao campo escalar.

O mínimo de Y encontra-se em

$$Z_m = \left[\frac{3}{2}B + 3\sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{4}{3}C} \right]^{2/3}. \quad (5.26)$$

O ponto $Z = Z_2$ é uma sela, sendo estável para $Y > 0$ e instável para $Y < 0$. O ponto $Z = Z_1$ é também uma sela, sendo estável se $Y < 0$ e instável se $Y > 0$. Se apenas tivermos um ponto de equilíbrio ($Z_1 = Z_2 \equiv Z_0$), então para $Y > 0$ este ponto é estável para valores $Z < Z_0$ e instável para $Z > Z_0$. Para $Y < 0$ temos o recíproco.

Considere-se agora Z muito grande. Neste caso $X \rightarrow 0$ e $Y^2 \sim Z/6 \rightarrow +\infty$ (ponto de de Sitter). A equação diferencial de Z fica

$$Z' = 2ZY = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} Z^{3/2}, \quad (5.27)$$

onde \pm corresponde ao sinal de Y .

A partir desta equação verifica-se que para $Y > 0$ este ponto no infinito é um atrator, e para $Y < 0$ é um repulsor.

Por fim vejamos o ponto $Z \rightarrow 0$, $C > 0$, $X^2 \rightarrow +\infty$ e $Y^2 \sim C^2/Z^2 \rightarrow +\infty$. A equação diferencial para Y fica

$$Y' = -2X^2 = -2Y^2. \quad (5.28)$$

Definindo $\psi^{-1} \equiv Y^2$, chegamos a

$$\psi' = \pm 2\psi^{1/2}, \quad (5.29)$$

onde \pm corresponde ao sinal de Y . Com esta equação verificamos que este ponto é estável para $Y < 0$ e instável para $Y > 0$.

5.2. Falso vácuo em $\alpha = 1$

Neste caso temos que

$$\rho \propto \phi^2. \quad (5.30)$$

Assim temos que a equação (5.21) fica

$$Y^2 + k = X^2 + BZ + \frac{Z}{6}, \quad (5.31)$$

onde $B = 4\pi\rho_0/(3\beta)$.

Novamente temos $X = C/Z$. Usando isto em (5.31) ficamos com

$$Y^2 = \frac{Z}{6} - k + BZ + \frac{C^2}{Z^2}. \quad (5.32)$$

Usando isto juntamente com a equação diferencial para Z ficamos com

$$W^2 \equiv Z'^2/4 = Y^2 Z^2 = \left(\frac{1}{6} + B \right) Z^3 - kZ^2 + C^2. \quad (5.33)$$

Novamente, para encontrar os pontos de equilíbrio é necessário estudar a equação $W^2 = 0$. Novamente, temos a raiz ($Z=0$) instável a $Y > 0$ e estável para $Y < 0$, se $C = 0$. Se $C > 0$ então temos as duas raízes restantes dadas por

$$Z_1 = \frac{2}{3a} \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-1 - \frac{27a^2 C^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{3a}, \quad (5.34)$$

$$Z_2 = \frac{2}{3a} \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-1 - \frac{27a^2 C^2}{2} \right) - \frac{2\pi}{3} \right] - \frac{1}{3a}, \quad (5.35)$$

onde $Z_2 < Z_1$ e $a \equiv \frac{1}{6} + B$. A estabilidade destes pontos é dada da mesma forma qu no caso anterior de poeira.

Se $k = 1$ temos um mínimo de W^2 (e assim de Y^2) em

$$Z_m = \frac{4}{1 + 6B}. \quad (5.36)$$

Para $k = 0$ ou $k = -1$, W^2 (e assim Y^2) é crescente para $Z > 0$.

Tal como no caso anterior, não temos pontos de equilíbrio para $k = -1$ ou $k = 0$. Para $k = 1$ temos as duas raízes dadas acima se for satisfeito

$$B < B_c(C) = \sqrt{\frac{4}{27C^2}} - \frac{1}{6}. \quad (5.37)$$

Considere-se agora Z e Y^2 grandes e X pequeno (“ponto” de de Sitter). Neste caso temos $Y^2 \sim (\frac{1}{6} + B)Z$. Substituindo na equação de Z' ficamos com

$$Z' = 2ZY = \pm \left(\frac{1}{6} + B \right) Z^2, \quad (5.38)$$

onde \pm corresponde ao sinal de Y .

A partir desta equação verifica-se que para $Y > 0$ este ponto no infinito é um atractor, e para $Y < 0$ é um repulsor. O mesmo que acontecia no caso de poeira.

Por fim vejamos o “ponto” dado por Z pequeno, $C > 0$, X^2 e $Y^2 \sim C^2/Z^2$ grandes. A equação diferencial para Y fica

$$Y' = -2X^2 = -2Y^2. \quad (5.39)$$

Esta é a mesma equação que tínhamos para poeira e assim este ponto é estável para $Y < 0$ e instável para $Y > 0$.

5.3. Stiff em $\alpha = 1$

Neste caso temos que

$$\rho \propto \phi^{-1}. \quad (5.40)$$

Assim temos que a equação (5.21) fica

$$Y^2 + k = X^2 + \frac{B}{Z^2} + \frac{Z}{6}, \quad (5.41)$$

onde $B = 32\pi\rho_0\beta^2/3$.

Novamente temos $X = C/Z$. Usando isto em (5.41) ficamos com

$$Y^2 = \frac{Z}{6} - k + \frac{B}{Z^2} + \frac{C^2}{Z^2}. \quad (5.42)$$

Usando isto juntamente com a equação diferencial para Z ficamos com

$$W^2 \equiv Z'^2/4 = Y^2 Z^2 = \frac{Z^3}{6} - kZ^2 + C^2 + B. \quad (5.43)$$

Novamente, para encontrar os pontos de equilíbrio é necessário estudar a equação $W^2 = 0$. Temos a raiz ($Z=0$) instável a $Y > 0$ e estável para $Y < 0$, se $C = B = 0$.

Neste caso temos

$$Y^2 + k \geq \left(\sqrt[3]{18 + 12^{-2/3}} \right) \sqrt[3]{B + C^2}, \quad (5.44)$$

sendo que o mínimo de $Y^2 + k$ ocorre a $Z = \sqrt[3]{12(B + C^2)}$. Novamente, se $k = -1$ ou $k = 0$, para $Z > 0$ temos sempre que $Y \neq 0$, pelo que apenas temos pontos de equilíbrio a Z finito para $k = 1$.

i) Tomando $k = 1$, os pontos de equilíbrio são dados por

$$Z_1 = 4 \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-1 - \frac{3(C^2 + B)}{8} \right) \right] - 2, \quad (5.45)$$

$$Z_2 = 4 \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-1 - \frac{3(C^2 + B)}{8} \right) - \frac{2\pi}{3} \right] - 2, \quad (5.46)$$

onde $Z_2 < Z_1$. A estabilidade destes pontos é dada da mesma forma que nos casos anteriores.

Os dois pontos de equilíbrio acima existem se for satisfeita a condição

$$C^2 + B < \frac{12}{\sqrt{27}}. \quad (5.47)$$

ii) Para $k = 0$ ou $k = -1$, W^2 (e assim Y^2) é crescente para $Z > 0$.

iii) Considere-se agora Z e Y^2 grandes e X pequeno (“ponto” de de Sitter). Neste caso temos $Y^2 \sim Z/6$. Substituindo na equação de Z' ficamos com

$$Z' = 2ZY = \pm Z^2/6 \quad (5.48)$$

onde \pm corresponde ao sinal de Y .

A partir desta equação verifica-se que para $Y > 0$ este ponto no infinito é um atrator, e para $Y < 0$ é um repulsor. O mesmo que acontecia no caso de poeira e falso vácuo.

iv) Por fim vejamos o “ponto” dado por Z pequeno, $C > 0$, X^2 e $Y^2 \sim (C^2 + B)/Z^2$ grandes. A equação diferencial para Y fica

$$Y' = -2Y^2. \quad (5.49)$$

Esta é a mesma equação que tínhamos para poeira e falso vácuo e assim este ponto é estável para $Y < 0$ e instável para $Y > 0$.

Vemos que os diferentes tipos de matéria resultam em comportamentos quase idênticos para a evolução do universo quando o acoplamento à matéria é caracterizado por $\alpha = 1$.

6. TEORIA DE SAA

Neste capítulo apresento um breve estudo de uma teoria proposta por Alberto Saa, uma teoria que se propõe a compatibilizar o elemento de volume da integração no espaço-tempo com a existência de torção. Isto resulta no grau de liberdade novo (escalar) que leva a que tenhamos torção propagativa. No entanto esta teoria não respeita as observações no sistema solar, pelo que se torna necessário modificá-la. Apresentando então uma modificação interessante da mesma para a tornar compatível com as observações. Começo antes de mais por introduzir a teoria de Einstein-Cartan (Relatividade Geral + torção), que esta teoria se propõe a modificar (ver [3,26])

6.1. Teoria de Einstein-Cartan

Em Relatividade Geral, assim como nas teorias escalares-tensoriais, é assumido que a conexão do espaço-tempo é simétrica, ou seja

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}. \quad (6.1)$$

Dizemos que o espaço-tempo da Relatividade Geral é um manifold V_4 (manifold pseudo-Riemanniano com conexão simétrica).

Relaxando esta hipótese, definimos o tensor de torção

$$S_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}). \quad (6.2)$$

Este espaço-tempo é um manifold U_4 , chamado de espaço-tempo de Riemann-Cartan. Como desejamos manter a condição de compatibilidade com a métrica ($D_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0$), a conexão deve ser escrita na forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \{\}_{\mu\nu}^{\lambda} - K_{\mu\nu}^{\lambda}, \quad (6.3)$$

onde $\{\}_{\mu\nu}^{\lambda}$ é a conexão de Levi-Civita (Relatividade Geral) e $K_{\mu\nu}^{\lambda} = -K_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}$ é o tensor de contorção. Este tensor pode ser escrito em termos do tensor de torção como

$$K_{\mu\nu}^{\lambda} = -S_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\nu}^{\lambda}{}_{\mu} - S_{\mu\nu}^{\lambda}. \quad (6.4)$$

Note-se também que o tensor de contorção pode ser dividido na forma

$$K_{\mu\nu}^{\lambda} = \tilde{K}_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{2}{3}(\delta_{\mu}^{\lambda}S_{\nu} - g_{\mu\nu}S^{\lambda}) \quad (6.5)$$

onde $S_{\mu} = S_{\mu\nu}^{\nu}$ é o vector de torção e onde $\tilde{K}_{\mu\nu\lambda} = \tilde{K}_{[\mu\nu\lambda]}$ é a parte sem traço do tensor de contorção. Assim, o escalar de curvatura pode ser escrito na forma

$$R = R(\{\}) + 4D_{\mu}S^{\mu} + \frac{16}{3}S_{\mu}S^{\mu} - \tilde{K}_{\mu\nu\lambda}\tilde{K}^{\mu\nu\lambda}. \quad (6.6)$$

Isto resulta na chamada teoria de Einstein-Cartan (EC). É importante notar que na teoria de Einstein-Cartan (mais geralmente, em qualquer teoria com torção) o princípio de equivalência não é válido na medida em que não dispomos de graus de liberdade suficientes para eliminar localmente os efeitos gravitacionais. Então, devido à existência do tensor de contorção (que dado ser um tensor, não pode ter todas as suas componentes convertidas em 0

em todos os sistemas de coordenadas) em (6.3) não é possível formar um referencial inercial local.

A acção fica então

$$S = \int \left[R(\{\}) + 4D_\mu S^\mu + \frac{16}{3} S_\mu S^\mu - \tilde{K}_{\mu\nu\lambda} \tilde{K}^{\mu\nu\lambda} + 16\pi L_m \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (6.7)$$

Para resolver as equações de campo, é necessário ter em conta a relação

$$D_\mu \sqrt{-g} = \partial_\mu \sqrt{-g} - \Gamma_{\rho\mu}^\rho \sqrt{-g} = 2S_\mu \sqrt{-g}. \quad (6.8)$$

A acção pode agora ser escrita na forma (eliminando uma derivada total)

$$S = \int \left[R(\{\}) - \frac{8}{3} S_\mu S^\mu - \tilde{K}_{\mu\nu\lambda} \tilde{K}^{\mu\nu\lambda} + 16\pi L_M \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (6.9)$$

e assim ficamos com a equação de campo da métrica

$$G_{\mu\nu}(\{\}) - \frac{8}{3} S_\mu S_\nu + g_{\mu\nu} \frac{4}{3} S_\rho S^\rho - 3\tilde{K}_{\mu\sigma\lambda} \tilde{K}_\nu^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{K}_{\sigma\rho\lambda} \tilde{K}^{\sigma\rho\lambda} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (6.10)$$

Devemos também calcular as equações para S_μ e para $\tilde{K}^{\mu\nu\lambda}$:

$$S_\mu = 6 \frac{\delta L_M}{\delta S^\mu}, \quad (6.11)$$

$$\tilde{K}_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{K}^{\mu\nu\lambda}}. \quad (6.12)$$

A quantidade $\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{K}^{\mu\nu\lambda}}$ é normalmente conhecida como hipérmomento. Aqui o hipérmomento encontra-se decomposto em duas componenets.

Mostra-se que tanto para campos de spin 0, 1/2, e 1 a quantidade S_μ é nula. Isto leva-nos a concluir que para a teoria de Einstein-Cartan o tensor de contorção é um tensor absolutamente anti-simétrico.

Quanto a $\tilde{K}^{\mu\nu\lambda}$, é possível verificar que esta quantidade é nula para campos escalares e vectoriais, sendo que para um campo de Dirac ficamos com

$$\tilde{K}^{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{8} \bar{\psi} \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\lambda]} \quad (6.13)$$

Estas identidades seguem do facto de que os Lagrangianos do campo escalar e vectorial podem ser escritos em termos de derivadas parciais, não contendo assim qualquer dependência em S_μ ou em $\tilde{K}^{\mu\nu\lambda}$. Quanto aos spinors de Dirac (ver por exemplo [26]) chega-se a (6.13) que naturalmente é absolutamente anti-simétrico. Vê-se assim que em EC o spin não é fonte do vector de torção, apenas fonte para a parte sem traço do tensor de contorção.

6.2. Modificação de EC - Teoria de Saa

Observe-se novamente a equação (6.8). Na teoria da Relatividade Geral tínhamos que $\nabla_\mu \sqrt{-g} = 0$. Tínhamos então um elemento de volume paralelo (transportado paralelamente). Como se vê em (6.8) tal não acontece na presença de torção. Por esta razão, Saa [3] argumenta que o elemento de volume $\sqrt{-g} d^4x$ não é o apropriado na presença de torção. Se em vez do elemento de volume anterior considerarmos o novo elemento de volume

$$d\text{vol} = e^{-2\Theta} \sqrt{-g} d^4x, \quad (6.14)$$

onde por definição $S_\mu = \partial_\mu \Theta$, então já temos $D_\mu e^{-2\Theta} \sqrt{-g} = 0$. Assim, o teorema da divergência fica escrito na forma

$$\int d^4x e^{-2\Theta} \sqrt{-g} D_\mu A^\mu = \int d^3\sigma_\mu A^\mu, \quad (6.15)$$

onde o segundo integral é um integral de superfície aplicado à superfície descrita por σ_μ .

Segundo a argumentação de Saa, o novo elemento de volume (6.14) é o elemento de volume correcto a utilizar em todos os integrais de volume, como por exemplo, o integral da acção. Esta fica então

$$S = \int d^4x e^{-2\Theta} \sqrt{-g} \left[R(\{\}) + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta - \tilde{K}_{\mu\nu\lambda} \tilde{K}^{\mu\nu\lambda} + 16\pi L_M \right], \quad (6.16)$$

onde foi eliminado um termo de superfície. Construindo as equações de campo ficamos com

$$G_{\mu\nu} + 2D_\mu \partial_\nu \Theta - 2g_{\mu\nu} \square \Theta + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial_\nu \Theta - \frac{8}{3} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \Theta \partial^\alpha \Theta = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (6.17)$$

$$R(\{\}) + \frac{16}{3} (\partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta + \square \Theta) = 0, \quad (6.18)$$

$$\tilde{K}_{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (6.19)$$

onde \square é o d'Alambertiano com torção e onde se assumiu, por simplicidade, que a matéria não depende de $\tilde{K}_{\mu\nu\lambda}$. Mais à frente irei mostrar como esta grandeza depende do spin da matéria (na mesma forma que na teoria de Einstein-Cartan). Tirando o traço da primeira equação, podemos escrever a segunda equação na forma

$$\square \Theta = 12\pi(T - 2L_M). \quad (6.20)$$

Com esta equação tiramos duas grandes diferenças desta teoria em relação à teoria de Einstein-Cartan. Primeiro, a equação (6.20) é uma equação de onda, o que significa que a torção (parte da torção dada por Θ) é propagativa. Tal não acontece em Einstein-Cartan onde a torção é não propagativa. Segundo, a fonte de torção nesta equação é todo o tipo de matéria que tem $T \neq 2L_M$, independentemente do spin. Tal não acontecia em Einstein-Cartan onde apenas spinors eram fonte de torção.

6.2.1. Campo escalar

Considere-se um campo escalar com o Lagrangiano

$$L_\phi = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (6.21)$$

Ficamos com as equações de campo

$$\square\phi = V(\phi), \quad (6.22)$$

$$\square\Theta = -24\pi V(\phi), \quad (6.23)$$

$$\tilde{K}_{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (6.24)$$

Vemos assim, que um campo escalar com massa é fonte de torção. Se a massa for nula então o campo não é fonte de torção.

6.2.2. Campo vectorial

Considere-se agora um campo vectorial. De modo a termos equações de campo invariante para a transformação de gauge $U(1)$ (como devemos ter em campos de gauge) devemos ter o Lagrangiano (ver [3])

$$L_A = - \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\Theta} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (6.25)$$

Assim, ficamos com as equações de campo

$$G_{\mu\nu} + 2D_\mu\partial_\nu\Theta - 2g_{\mu\nu}\square\Theta + \frac{16}{3}\partial_\mu\Theta\partial_\nu\Theta - \frac{8}{3}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\Theta\partial^\alpha\Theta = \pi g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - 4\pi F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha, \quad (6.26)$$

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (6.27)$$

$$\square\Theta = 6\pi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (6.28)$$

$$\tilde{K}_{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (6.29)$$

Vemos assim que um campo de gauge (vectorial) é fonte de torção. Novamente, a parte da torção dada por $\tilde{K}_{\mu\nu\lambda}$ é nula.

6.2.3. Spinor de Dirac

Por fim analisamos um campo spinorial de Dirac ψ (como usual temos $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$), cujo Lagrangiano generalizado para o espaço-tempo curvo é

$$L_\psi = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\alpha D_\alpha\psi - (D_\alpha\bar{\psi})\gamma^\alpha\psi) - V(\bar{\psi}\psi) \quad (6.30)$$

onde $\gamma^\alpha = \gamma^\alpha(x)$ são as matrizes de Dirac generalizadas para o espaço tempo curvo, e a derivada covariante para um spinor é dada por

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \omega_\mu \psi, \quad (6.31)$$

e para o conjugado

$$D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \bar{\psi} \omega_\mu, \quad (6.32)$$

onde ω_μ é a conexão spinorial dada por

$$\omega_\mu = \frac{1}{8}(\gamma^\nu \partial_\mu \gamma_\nu - (\partial_\mu \gamma_\nu) \gamma^\nu - [\gamma^\nu, \gamma_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho]). \quad (6.33)$$

Introduzindo o Lagrangiano de Dirac descrito por (6.30) chegamos a

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{\partial V}{\partial \bar{\psi}} = 0 \quad (6.34)$$

e

$$i(D_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \quad (6.35)$$

onde foi utilizada a identidade $D_\mu \gamma^\nu = 0$ (ver por exemplo [26]).

Em relação a estas duas equações, Saa [3] afirma que este modelo tem a vantagem de que as equações anteriores são obtidas usando o formalismo Lagrangiano (que se acabou de fazer) são as mesmas generalizando as equações de campo no espaço-tempo plano para conter curvatura e torção (o que claramente é verdade). No entanto, Saa afirma que isto não acontecia na teoria de Einstein-Cartan. Tal não corresponde à verdade, pois as equações anteriores são também obtidas na teoria de Einstein-Cartan (à parte que em Einstein-Cartan $S_\mu = 0$).

Para a torção temos

$$\square \Theta = 24\pi[i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - i(D_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi - V], \quad (6.36)$$

e

$$\tilde{K}^{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{8}\bar{\psi}\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\lambda]}\psi. \quad (6.37)$$

Esta última equação é idêntica à que obtemos na teoria de Einstein-Cartan. Note-se que na equação (6.36) foi usada a relação

$$D_\alpha \frac{\delta \omega_\mu}{\delta(D_\alpha \Theta)} \propto [\gamma^\nu, \gamma_\rho] D_\alpha \frac{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\delta(D_\alpha \Theta)} = 0, \quad (6.38)$$

onde foram usadas as relações (6.3) e (6.5).

Considere-se agora as observações no sistema solar.

Neste caso é útil reparar que o Lagrangiano

$$S = \int d^4x e^{-2\Theta} \sqrt{-g} \left[R(\{\}) + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta + 16\pi L_M \right], \quad (6.39)$$

(onde se anteviu $\tilde{K}_{\mu\nu\lambda} = 0$) pode ser escrito na forma de uma teoria de Brans-Dicke com acoplamento à matéria

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi R(\{\}) - \frac{\omega}{\Phi} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + 16\Phi \pi L_M \right], \quad (6.40)$$

onde nesta teoria devemos ter $\omega = -4/3$ e onde se fez $\Phi = e^{-2\Theta}$. Claramente esta teoria não passa os testes no sistema solar pois necessitaríamos de um ω muito maior (ver BD em campo fraco).

Com isto, torna-se necessário modificar a teoria de modo a torná-la compatível com as observações.

Uma modificação imediata consiste em considerar que o nosso elemento de volume é uma função arbitrária do nosso escalar de torção Θ . Substituindo $\sqrt{-g}e^{-2\Theta}$ por $\sqrt{-g}e^{-2\Theta}f(\Theta)$ ficamos com a acção

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(\Theta) \left[R(\{\}) + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta + 16\pi L_M \right]. \quad (6.41)$$

Escrevendo agora $\Phi = f(\Theta)e^{-2\Theta}$ ficamos com o Lagrangiano na forma de uma teoria escalar tensorial (com acoplamento à matéria)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi R(\{\}) - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + 16\pi L_M \right], \quad (6.42)$$

onde

$$\omega(\Phi) = \frac{4f' + \frac{8}{3}f}{(f' - 2f)^2}. \quad (6.43)$$

Como é sabido ajustando a função f para termos $\omega(\Phi) \gg 1$ hoje, esta teoria torna-se compatível com as observações no sistema solar. No entanto esta teoria perde o propósito da teoria original de Saa, que é tornar o elemento de volume compatível com a existência de torção.

Procurei outras formas de modificar a teoria, tendo chegado a uma modificação interessante da teoria de Saa que agora apresento.

6.3. Modificação da Teoria de Saa - Bosões e Fermiões

Para esta primeira modificação, pensei em considerar que a teoria “como se encontra” é válida ao nível microscópico (campos escalares, vectoriais, e spinoriais), sendo que o elemento de volume da densidade Lagrangiana de bosões não deve ser modificado, ou seja, é simplesmente $\sqrt{-g}d^4x$. O elemento de volume $e^{-2\Theta}\sqrt{-g}d^4x$ aplica-se apenas a fermiões. Ou seja, os bosões “vivem” num espaço-tempo sem torção ($S_\mu = 0$ e $\tilde{K}_{\mu\nu\lambda} = 0$), enquanto as equações de campo de fermiões envolvem estas duas partes da torção do espaço-tempo. Surge agora a questão de como se deve comportar um aglomerado macroscópico de diversos tipos de partículas em forte interação? Para este consideramos de forma genérica que o elemento de volume tem uma função de transferência macroscópica $M(\Theta)$ a multiplicar. Tal tem como função descrever o modo como um aglomerado de partículas por sua vez gera torção, já que impusemos o seu conhecimento para o caso de uma única partícula. A nossa acção fica então

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\Theta} \left[R(\{\}) + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta - \tilde{K}_{\mu\nu\lambda} \tilde{K}^{\mu\nu\lambda} \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \sqrt{-g} M(\Theta) e^{-2\Theta} L_{macro} + \quad (6.44)$$

$$\int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\Theta} L_{fermiões} + \int d^4x \sqrt{-g} L_{bosões}, \quad (6.45)$$

onde L_{macro} é o Lagrangiano de fluidos macroscópicos compostos por fermiões (como electrões, protões e neutrões) e bosões (como bosões de gauge e bosão de Higgs). A função função de transferência macroscópica $M(\Theta)$ resulta por exemplo da “interferência” entre os fermiões dos átomos e os bosões virtuais da interação electromagnética (campo electromagnético no átomo). Fazendo os cálculos com este Lagrangiano macroscópico chegamos às equações de campo da métrica

$$G_{\mu\nu}(\{\}) + 2D_\mu \partial_\nu \Theta - 2g_{\mu\nu} \square \Theta - \frac{8}{3} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \Theta \partial^\lambda \Theta + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial_\nu \Theta - 3\tilde{K}_{\mu\sigma\lambda} \tilde{K}_\nu^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{K}_{\sigma\rho\lambda} \tilde{K}^{\sigma\rho\lambda} = 8\pi M(\Theta) T_{\mu\nu}^{macro}, \quad (6.46)$$

e do campo Θ

$$\square \Theta = 12\pi \left[M(\Theta)(T^{macro} - 2L_{macro}) + M'(\Theta)L_{macro} \right]. \quad (6.47)$$

Para ter $\square \Theta = 0$ no caso de poeira ($T^{macro} = L_{macro} = 0$), devemos ter (considera-se, como em Einstein-Cartan, que matéria como poeira não contribui para $\tilde{K}^{\sigma\rho\lambda}$)

$$M(\Theta) = e^\Theta, \quad (6.48)$$

para assim respeitar as observações no sistema solar. Quanto ao lado direito de (6.46) devemos saber o valor da constante $\Theta = \Theta_0$. O valor de $M(\Theta)$ pode no entanto ser absorvido para a definição da constante gravitacional (recorde-se que uso aqui $G = c = 1$).

Este novo elemento de volume ($e^{-\Theta}\sqrt{-g}$) surge como um “meio termo” entre bosões ($e^0\sqrt{-g}$) e entre fermiões ($e^{-2\Theta}\sqrt{-g}$). Deveras, podemos definir o elemento de volume de um Lagrangiano (ou parte de um) que envolva mais do que uma partícula como sendo

$$V = \sqrt[N]{V_1 V_2 \dots V_N}, \quad (6.49)$$

onde N é o número de campos envolvidos na integração e V_i ($i = 1, 2, \dots, N$) o elemento de volume de cada um desses campos, que pode ser $e^{-2\Theta}\sqrt{-g}$ (fermião) ou $e^0\sqrt{-g}$ (bosão). Por exemplo se tivermos um fermião acoplado a um bosão (como acontece com fermiões com carga eléctrica), a parte da acção que depende do acoplamento escreve-se como

$$S_{coup} = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\Theta} L_{coup}. \quad (6.50)$$

O mesmo elemento de volume aplica-se para o fluido sem pressão que constitui os planetas, estrelas, meio interstelar, etc., sendo que este, como referido, é uma mistura entre bosões e fermiões. Neste sentido, a relação (6.49) é consistente.

Sendo assim, para um campo escalar temos

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi R(\{\}) + \frac{4}{3} \frac{1}{\Phi} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + 16\pi L_M \right] \quad (6.51)$$

onde se anteviu $\tilde{K}_{\mu\nu\lambda} = 0$ e se definiu $\Phi = e^{-2\Theta}$. Ou seja a teoria pode ser escrita como uma teoria de Brans-Dicke com $\omega = -\frac{4}{3}$ (com a diferença de que as geodésicas não bosónicas contêm torção que dependerá de Φ). Teorias deste género encontram-se estudadas por exemplo em [23].

6.3.1. Constante cosmológica

Como a poeira não é fonte de torção, esta por si só não origina diferenças em relação à Relatividade Geral. Por isso devemos introduzir uma constante cosmológica ou um campo escalar. No que diz respeito à constante cosmológica, existe uma âmbiguidade relativa ao elemento de volume que esta deve ter na acção. A primeira escolha pode ser vista considerando a constante cosmológica como um termo de curvatura. Neste caso o elemento de volume é $e^{-2\Theta}$. Assim ficamos com a acção

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\Theta} \left[R(\{\}) - 2\Lambda + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta \right] \quad (6.52)$$

onde foi naturalmente antecipado que $\tilde{K}_{\mu\nu\lambda} = 0$. Neste caso temos a equação de campo de Θ escrita como

$$\square \Theta = -3\Lambda. \quad (6.53)$$

A equação de campo da métrica, considerando esta constante cosmológica e poeira, fica

$$G_{\mu\nu}(\{\}) + g_{\mu\nu} \Lambda + 2D_\mu \partial_\nu \Theta - 2g_{\mu\nu} \square \Theta - \frac{8}{3} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \Theta \partial^\lambda \Theta + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial_\nu \Theta = 8\pi T_{\mu\nu}^{\text{dust}} e^\Theta \quad (6.54)$$

Aplicando estas equações a um universo plano ($k = 0$) de FRW ficamos com

$$3H^2 - 6H\dot{\Theta} + \frac{8}{3}\dot{\Theta}^2 = \Lambda + 8\pi\rho e^\Theta \quad (6.55)$$

$$\ddot{\Theta} + 3H\dot{\Theta} + 2\dot{\Theta}^2 = 3\Lambda, \quad (6.56)$$

$$\rho = \rho_0 a^{-3}. \quad (6.57)$$

onde os pontos correspondem à derivação em relação ao tempo cósmico t .

De modo similar ao que foi feito no capítulo anterior, introduzimos as variáveis

$$X = \dot{\Theta}, \quad Y = H + \frac{X}{2}. \quad (6.58)$$

Ficamos assim com o sistema dinâmico

$$\dot{X} = 3\Lambda - 3YX - \frac{X^2}{2}, \quad (6.59)$$

$$\dot{Y} = -\frac{3}{2}Y^2 - 2YX - \frac{41}{72} + \frac{13}{3}, \quad (6.60)$$

junto com a equação de constrangimento

$$Y^2 - 3YX + \frac{77}{36}X^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi e^\Theta \rho}{3}. \quad (6.61)$$

O sistema dinâmico só pode ser formado no caso em estudo de $k = 0$. Apesar de tudo este caso é o mais importante, de acordo com as observações da curvatura espacial do universo.

A equação (6.59) mostra que o ponto de equilíbrio com $X = 0$ (como seria no caso de ponto de de Sitter) é proibido. Teriamos-lo apenas se $\Lambda = 0$. Sendo Λ um termo pequeno ($\ll 1$ nas unidades usadas), o valor do ponto de equilíbrio em questão deve ter X da ordem de Λ (o termo que origina o desvio do ponto de equilíbrio de $X = 0$), ou seja, temos o ponto de equilíbrio com $X^2 = \beta\Lambda$, em que $\beta = \mathcal{O}(1)$.

Multiplicando a equação $\dot{Y} = 0$ por $-3/2$ e somando à equação $\dot{X} = 0$ e $\dot{Y} = 0$ ficamos com

$$X^2 = \beta\Lambda, \quad Y^2 = \left(\frac{14}{9} - \frac{17}{108}\beta\right)\Lambda. \quad (6.62)$$

Vemos então que o ponto existe apenas se $\beta < 169/17 \approx 10$. Isto é compatível com a condição de que β é uma constante da ordem da unidade.

Usando $\dot{X} = 0$ chegamos à equação para β

$$\beta\sqrt{\frac{14}{9} - \frac{17}{108}\beta} - 1 + \frac{\beta}{6} = 0, \quad (6.63)$$

que resolvendo numericamente dá $\beta \approx 0.73$. Este valor é claramente da ordem da unidade como desejado.

Seja $X = a\sqrt{\Lambda}$ e $Y = b\sqrt{\Lambda}$ ($a \approx \pm 0.85$ e $b \approx \pm 1.2$). Para o caso em que $b > -a/2$ e $a < 0$ temos uma espiral estável centrada num ponto de equilíbrio estável que corresponde a um Universo em expansão acelerada (exponencial). Para os valores possíveis de a e b temos que isto é satisfeito sempre para $X < 0$.

Para o caso em que $a > 0$, para que o ponto de equilíbrio seja estável devemos ter $b > 0$.

Por fim usando (6.61) chegamos a

$$e^\Theta \rho \approx 0.005\Lambda \quad (6.64)$$

onde para obter este resultado foi necessário usar um valor mais preciso de β (com mais do que duas casa decimais). Apesar de termo um universo em expansão acelerada, tal não corresponde à clássica solução de de Sitter pois temos $X = a\sqrt{\Lambda} \Rightarrow \Theta = a\sqrt{\Lambda}t + \Theta_0$. Note-se no entanto que, como é visível, Θ varia muito lentamente.

6.3.2. Fluido ultrarelativista (bosões + fermiões)

Considere-se agora um fluido ultra-relativista composto por fermiões e bosões inseparáveis e em total e constante interação. Isto acontece por exemplo no universo antes do fim da aniquilação e^+e^- . Por inseparáveis quero dizer que não é possível “seguir” fisicamente cada um dos fluidos pois existe uma constante conversão de bosões em fermiões e vice-versa (formam um só fluido). Neste caso temos

$$\square\Theta = 12\pi\rho e^\Theta. \quad (6.65)$$

Para este caso é possível escrever a acção na forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi R(\{\}) - \frac{\omega}{\Phi} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + 16\pi \sqrt{\Phi} L_M \right] \quad (6.66)$$

com $\omega = -4/3$ e $\Phi = e^{-2\Theta}$

Consideramos no entanto a variável mais prática Θ . Usamos agora as variáveis

$$X = \Theta', \quad Y = \frac{a'}{a} + \frac{X}{2}, \quad (6.67)$$

onde $'$ representa a derivação em relação ao tempo conforme $d\eta = dt/a$. Chegamos assim ao sistema dinâmico

$$X' = \frac{23}{2}XY - \frac{67}{8}X^2 - \frac{9}{2}(Y^2 + k), \quad (6.68)$$

$$Y' = -\frac{31}{4}(Y^2 + k) + \frac{81}{4}YX - \frac{907}{144}X^2, \quad (6.69)$$

e à equação de constrangimento

$$Y^2 + k - 3XY + \frac{77}{36}X^2 = \frac{8\pi e^\Theta \rho a^2}{3}. \quad (6.70)$$

Analisando o sistema vemos que temos o ponto de equilíbrio trivial dado por $X = Y = k = 0$. Este ponto corresponde a $\rho = 0$ (vácuo), caso que não é aqui tratado.

Temos também o ponto de equilíbrio dado por $X = 0$, $Y = \pm 1$ e $k = -1$, Novamente, este ponto aplica-se apenas no caso $\rho = 0$.

Considere-se agora os “pontos” no infinito. Considere-se $|X|$ e $|Y|$ grandes. Considere-se também uma descrição destas variáveis em coordenadas polares

$$X(\eta) = r(\eta) \cos(\varphi(\eta)), \quad Y = r(\eta) \sin(\varphi(\eta)), \quad (6.71)$$

onde para r tomaremos um valor grande. Nas direções onde $r' > 0$ temos as variáveis a divergir. Caso $r' < 0$ o sistema aproxima-se desde o “infinito”. Temos assim

$$r' = \frac{197}{144} \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) - \frac{67}{8} \cos^3(\varphi) - \frac{31}{4} \sin^3(\theta) + \frac{63}{4} \sin^2(\varphi) \cos(\varphi). \quad (6.72)$$

Substituindo X' e Y' temos

$$r' = \frac{197}{144} \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) - \frac{67}{8} \cos^3(\varphi) - \frac{31}{4} \sin^3(\theta) + \frac{63}{4} \sin^2(\varphi) \cos(\varphi). \quad (6.73)$$

Verifica-se (graficamente) que $r' > 0$ para três intervalos angulares. Um deles muito pequeno, centrado em $\varphi_1 \approx 0.25\pi$, outro entre $\varphi_2 \approx 0.8\pi$ e $\varphi_3 \approx 1.2\pi$, e por fim entre $\varphi_4 \approx 1.3\pi$ e $\varphi_5 \approx 1.8\pi$. Fora dessa região angular as trajectórias “afastam-se do infinito”.

Por fim, para o “ponto” de de Sitter consideramos X pequeno e $|Y|$ grande ficamos com a equação de Y'

$$Y' = -\frac{31}{4}Y^2, \quad (6.74)$$

o que mostra que neste ponto Y tende a decrescer muito rapidamente. Olhando para a equação de X' ficamos com

$$X' = -\frac{9}{2}Y^2, \quad (6.75)$$

e também tende a decrescer muito rapidamente, afastando-se de 0.

Assim, verificamos que o “ponto” de de Sitter não é um atrator.

Para terminar note-se apenas que a radiação termica de fundo, sendo composta por bosões cuja energia de interação com a matéria é desprezável, tem a acção

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\Theta} \left[R(\{\}) + \frac{16}{3} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta \right] + \int d^4x \sqrt{-g} L_{rad}. \quad (6.76)$$

como acontece para um fluido só de bosões.

Mostra-se facilmente que como o traço do tensor energia-momento da radiação é nulo, temos

$$\square \Theta = 0, \quad (6.77)$$

e assim verificamos que a radiação térmica de fundo não contribui para a torção.

7. CONCLUSÃO

Nesta tese de Mestrado dediquei-me a explorar as teorias escalares-tensoriais, em especial aquelas com potencial quadrático. Fiz também um breve estudo da teoria de Saa, que é de certa forma também uma teoria escalar-tensorial.

No capítulo 3 comecei por analisar as soluções exactas das teorias escalares-tensoriais para um potencial quadrático para um universo dominado por radiação, matéria “stiff”, ou vazio. Infelizmente os métodos aplicados não permitem obter soluções exactas para o caso de poeira. Porém o caso de vazio permite analisar o comportamento do universo quando a densidade é consideravelmente baixa. A análise do caso de poeira é no entanto feita nos capítulos 4 e 5 (análise de sistemas dinâmicos), onde a função de acoplamento ω é constante. Apesar da análise ser feita no referencial de Einstein, foi possível retirar diversos comportamentos para o referencial físico (de Jordan), nomeadamente a expansão acelerada. Tal foi concluído pela definição do tempo conforme e das variáveis usadas no sistema dinâmico.

Posteriormente no capítulo 4 considerei teorias escalares-tensoriais com ω constante e um campo escalar complexo para um universo dominado por poeira, radiação, “stiff”, falso vácuo ou vazio. Em geral a teoria mostrou-se similar ao caso do campo complexo real.

Na mesma linha, no capítulo 5 considerei novamente teorias escalares-tensoriais com ω constante, porém agora com um acoplamento entre o campo e a matéria. Verifiquei que com as variáveis escolhidas, o sistema dinâmico obtido é idêntico ao caso sem acoplamento à matéria ($\alpha = 0$) perante uma redifinição da constante de acoplamento ω . Isto excepto para um caso de acoplamento muito particular onde se verificou a necessidade de fazer um estudo de sistema dinâmico à parte. Entre outros comportamentos, foi possível encontrar universos em expansão acelerada.

Por fim, no capítulo 6 apresentei a teoria proposta em 1993 por Alberto Saa e uma modificação que construí de modo a tornar esta teoria compatível com as observações no sistema solar. Pensei em diferenciar o comportamento de bósons e férmions no sentido em que os bósons seguem trajectórias sem torção e os férmions seguem as trajectórias com torção. Para matéria macroscópica temos uma mistura destas partículas (virtuais ou não). Verifica-se que se poeira não for fonte de torção então o elemento de volume é um “meio termo” entre o elemento de volume de bósons e férmions. Como a poeira não é fonte de torção, verifica-se que, apesar das observações no sistema solar serem respeitadas, o fenómeno da energia escura não pode ser reproduzido, é necessário uma constante cosmológica ou um campo com efeito similar. No entanto, nestes casos, temos obviamente um comportamento distinto da Relatividade Geral, pois estes termos são fonte de torção. No entanto é ainda claramente possível ter expansão acelerada.

Desde a sua gradual concepção, as teorias escalares-tensoriais foram sempre um ramo muito activo de pesquisa na área da cosmologia. São teorias altamente credíveis que têm feito parte dos mais importantes artigos/trabalhos na área da cosmologia, quer no estudo da energia escura (aqui focado), quer em outros estudos como o estudo da inflação cosmológica. Estas teorias surgem também em teorias de gravitação quântica, como por exemplo, na famosa teoria das cordas.

Temos também que estas teorias são equivalentes a muitas outras, como por exemplo às chamadas teorias $f(R)$, que consideram uma forma mais geral da parte geométrica da equação de Einstein tirada de um princípio variacional com uma função arbitrária do escalar de curvatura. A própria teoria de Saa aqui escrita é de certa forma uma teoria escalar tensorial (podendo o Lagrangiano da teoria ser escrito na forma “canónica” das teorias escalares-tensoriais), porém com acoplamento à matéria.

Uma quantidade significativa de teorias (escalares-tensoriais) foram aqui exploradas e obteve-se diversos comportamentos (seja em forma quantitativa ou qualitativa), em particular, de expansão acelerada. Apesar de me ter focado especialmente no potencial quadrático esta análise permite ter uma forte ideia do comportamento do universo em teorias escalares-tensoriais com potenciais de quarta ordem, sexta ordem, etc.. Chegou-se muitas vezes a soluções, que com o passar do tempo, tendem à teoria da Relatividade Geral com constante cosmológica - teoria que se tem verificado descrever muito bem o universo pós-inflacionário. Foram assim apresentados estudos bastante plausíveis, certamente a ter em conta na modelação da gravitação como uma teoria escalar-tensorial.

Concluo esperando ter aberto o caminho para “ressuscitar” a teoria de Saa e poder inspirar outras modificações da teoria (ou alternativas) que possam vir a trazer novas ideias para o modo como funciona o universo em que vivemos.

Agradecimentos

Ao Doutor Nelson Nunes, meu orientador, pela ajuda e colaboração prestadas no esclarecimento de dúvidas e na disponibilidade demonstrada apesar do seu horário preenchido. Agradecer também a ajuda na preparação do artigo que contém o tema das teorias escalares tensoriais e do artigo sobre a teoria de Saa.

Ao Doutor Francisco Lobo, meu co-orientador, pelas suas sugestões que ajudaram a enriquecer o meu trabalho e na ajuda à preparação do artigo que contém o tema das teorias escalares tensoriais e do artigo sobre a teoria de Saa.

Ao prof. Doutor José Pedro Mimoso por me ter sugerido o tema que levou ao terceiro capítulo deste trabalho, e pela ajuda que me prestou no estudo do mesmo.

À minha mãe, pelo incessante apoio que me deu nas alturas mais difíceis e por acreditar sempre nas minhas capacidades. É graças a ela que eu cheguei onde cheguei e que sou quem sou. É por tudo isto, e muito mais, que dedico este trabalho à melhor mãe do mundo, a minha.

“Embora a minha mãe não soubesse nada de ciência, exerceu também enorme influência em mim. De um modo particular, possuía um extraordinário sentido de humor, e aprendi com ela que as mais elevadas formas de discernimento a que podemos aceder são o riso e a compaixão humana.

Richard Feynman

-
- [1] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astron. J.* **116** (1998) 1009 [astro-ph/9805201].
 - [2] A Qualitative Analysis of the Attractor Mechanism of General relativity, Jos P. Mimoso and Ana Nunes, *Astrophysics and Space Science* 283, pp. 661-666, (2003).
 - [3] A. Saa, Sao Paulo Univ. - IFUSP-P-1072 (93/09,rec.Oct.) 19 p. e: LANL gr-qc/9309027 [gr-qc/9309027].
 - [4] C. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925.
 - [5] C. M. Will, *Living Rev. Rel.* **17** (2014) 4 [arXiv:1403.7377 [gr-qc]].
 - [6] C. Santos and R. Gregory, *Annals Phys.* **258** (1997) 111 [gr-qc/9611065].
 - [7] F. Byrd, M. D. Friedmann, “*Handbook of Elliptical Integrals for Engineers and Scientists*”, vol 617, Springer-Verlag, New York, 1971
 - [8] G. Hinshaw *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **208** (2013) 19 [arXiv:1212.5226 [astro-ph.CO]].
 - [9] H. W. Lee, K. Y. Kim and Y. S. Myung, *Eur. Phys. J. C* **71** (2011) 1585 [arXiv:1010.5556 [hep-th]].
 - [10] J. P. Abreu, P. Crawford and J. P. Mimoso, *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 1919 [gr-qc/9401024].
 - [11] J. P. Mimoso and A. M. Nunes, *Phys. Lett. A* **248** (1998) 325.
 - [12] J. P. Mimoso and A. Nunes, *Astrophys. Space Sci.* **261** (1999) 327.
 - [13] J. P. Mimoso and A. Nunes, *Astrophys. Space Sci.* **283** (2003) 4, 661.
 - [14] J. P. Mimoso and D. Wands, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 477 [gr-qc/9405025].
 - [15] K. Uehara and C. W. Kim, *Phys. Rev. D* **26** (1982) 2575.
 - [16] L. Amendola, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 043511 [astro-ph/9908023].
 - [17] Lichtenegger, H., & Mashhoon, B. 2004, arXiv:physics/0407078
 - [18] L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 047501 [arXiv:0911.3401 [gr-qc]].
 - [19] M. Hohmann, L. Jarv, P. Kuusk and E. Randla, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 8, 084054 [*Phys. Rev. D* **89** (2014) 6, 069901] [arXiv:1309.0031 [gr-qc]].
 - [20] Mimoso, J. P., ”The Dynamics of Scalar Fields in Cosmology” (2011) in DYNAMICS, GAMES AND SIENCE II, Springer Proceedings in Mathematics, Volume 2, 543-547
 - [21] Misner, C., Thorne, K. & Wheeler, A. (1973) “Gravitation”, W. H. Freeman
 - [22] Narlikar, J. V. (2011, Abril) “Mach’s Principle”. Tirado de <http://www.ias.ac.in/resonance/Volumes/16/04/0310-0320.pdf>.
 - [23] N. Banerjee and D. Pavon, *Class. Quant. Grav.* **18** (2001) 593 [gr-qc/0012098].
 - [24] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].
 - [25] R. M. Wald, Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p
 - [26] S. Capozziello and M. De Laurentis, *Phys. Rept.* **509** (2011) 167 [arXiv:1108.6266 [gr-qc]].
 - [27] S. J. Kolitch, *Annals Phys.* **246** (1996) 121 [gr-qc/9409002].
 - [28] S. J. Kolitch and B. Hall, gr-qc/9410039.
 - [29] S. M. Carroll, W. H. Press and E. L. Turner, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30** (1992) 499.
 - [30] T. Damour and K. Nordtvedt, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 2217.
 - [31] V. Faraoni, *Phys. Lett. A* **245** (1998) 26 [gr-qc/9805057].
 - [32] Weinberg, S. (1972) “Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity”, Wiley

Apêndice - Funções elípticas de Jacobi e Weierstrass

As funções elípticas de Jacobi vêm da função (chamada integral elíptico de primeira espécie)

$$u = F(\phi|m) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{A1})$$

onde $0 < m^2 < 1$ é o módulo elíptico. Temos a amplitude de Jacobi de

$$\text{am}(u|m) = F^{-1}(u|m), \quad (\text{A2})$$

o seno e cosseno de Jacobi

$$\text{sn}(u|m) = \sin(\text{am}(u|m)), \quad \text{cn}(u|m) = \cos(\text{am}(u|m)), \quad (\text{A3})$$

respectivamente, e o delta de Jacobi

$$\text{dn}(u|m) = \sqrt{1 - m^2 \sin^2(\text{am}(u|m))} \quad (\text{A4})$$

O integral elíptico de terceira espécie é

$$\Pi(\phi|m, \alpha) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 - \alpha \sin^2 \theta) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}. \quad (\text{A5})$$

A função elíptica de Weierstrass é dada por

$$u = \int_{\wp(u)}^\infty \frac{dx}{4x^3 - g_2x - g_3}. \quad (\text{A6})$$

A função zeta de Weierstrass é dada por

$$\frac{d\zeta(z, g_2, g_3)}{dz} = -\wp(z, g_2, g_3). \quad (\text{A7})$$

Por fim, a função sigma de Weierstrass é dada por

$$\frac{d}{dz} \ln \sigma(z, g_2, g_3) = \zeta(z, g_2, g_3). \quad (\text{A8})$$